

Федеральный государственный образовательный стандарт
Образовательная система «Школа 2100»

В.А. Гусев, А.Г. Рубин

**МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ**
ГЕОМЕТРИЯ

10 класс



Базовый и углублённый уровни

БАУСС

Федеральный государственный образовательный стандарт
Образовательная система «Школа 2100»

В.А. Гусев, А.Г. Рубин

**МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ**

ГЕОМЕТРИЯ

10 класс

Базовый и углублённый уровни

Москва

БАЛСС

2016

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я721
Г96

Федеральный государственный образовательный стандарт
Образовательная система «Школа 2100»



Руководитель издательской программы –
член-корр. РАО, доктор пед. наук, проф. *Р.Н. Бунеев*

Гусев, В.А.
Г96 **Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 кл. : учеб. для организаций, осуществляющих образовательную деятельность. Базовый и углублённый уровни / В.А. Гусев, А.Г. Рубин. – М. : Баласс, 2016. – 384 с. (Образовательная система «Школа 2100»).**

ISBN 978-5-905683-93-0

Учебник «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия» предназначен для учащихся 10 класса, изучающих предмет на базовом или углублённом уровне. Соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту среднего общего образования. Является продолжением непрерывного курса математики и составной частью комплекта учебников развивающей Образовательной системы «Школа 2100».

Может использоваться как учебное пособие.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я721

Данный учебник в целом и никакая его часть не могут быть
скопированы без разрешения владельца авторских прав

ISBN 978-5-905683-93-0

© Гусев В.А., Рубин А.Г., 2016
© ООО «Баласс», 2016

Дорогие ребята!

Перед вами учебник геометрии для 10-го класса Образовательной системы «Школа 2100». Он предназначен для изучения геометрии как на базовом, так и на углублённом уровне.

Изучая геометрию, вы научитесь работать с разными геометрическими фигурами, узнаете многие их свойства и признаки, сможете узнавать их среди окружающих вас предметов, вычислять характеризующие их величины: длины, углы, площади, объёмы и др., моделировать с их помощью некоторые реальные объекты и ситуации. Это поможет вам стать увереннее в себе, добиться успехов при решении возникающих в жизни задач, так как при этом очень часто придётся иметь дело с геометрическими фигурами.

Приведённый в учебнике теоретический материал обозначен так:

ОТКРЫВАЕМ НОВЫЕ ЗНАНИЯ

Основной теоретический материал, который необходимо знать каждому ученику, выделен слева на полях книги сплошной оранжевой чертой. Этот материал должен знать учащийся и базового, и углублённого уровня. Именно этот материал составляет основу курса, без его усвоения невозможно получить удовлетворительную отметку.

Теоретический материал, не выделенный оранжевой чертой на полях, предназначен для более глубокого изучения геометрии, её практического применения в науке и технике. Этот материал будет способствовать вашему математическому развитию. Он является обязательным для занимающихся на углублённом уровне, но занимающиеся на базовом уровне тоже могут при желании к нему обращаться.

Кроме того, в учебнике есть целые параграфы, предназначенные для изучения только на углублённом уровне. Номера таких параграфов отмечены звёздочкой, и в их начале помещено изображение совы:



Приводимые в учебнике исторические сведения помогут вам понять, как зарождалась и развивалась геометрия, какие события сопутствовали некоторым её открытиям и достижениям.

РАЗВИВАЕМ УМЕНИЯ

Так обозначены задания на применение знаний. Они даны на трёх уровнях сложности:

- Н** **Необходимый уровень.** Задания, которые должны уметь выполнять все учащиеся. Выполнение этих заданий поможет вам понять, усвоены ли основные понятия и факты, умеете ли вы применять их к решению стандартных задач.
- П** **Повышенный уровень.** Задания, предназначенные для учащихся, которые хотят усовершенствовать свои знания. Эти задания требуют более серьёзного усвоения учебного материала, для их решения, наряду с известными приёмами и идеями, может понадобиться выдвижение некоторой новой идеи. Особое значение эти задания имеют для углублённого уровня обучения.
- М** **Максимальный уровень.** Эти задания выполняют те учащиеся, которые хотят научиться решать более сложные, нестандартные задачи. Работа над ними может потребовать значительных усилий, изобретательности и настойчивости.

При этом **ни на одном из уровней выполнение всех заданий, предложенных в учебнике, не является обязательным!** Ученики под руководством педагога выбирают задания в соответствии со своими возможностями и потребностями.

Среди заданий необходимого уровня мы дополнительно выделяем следующие две группы заданий и отмечаем их особыми знаками:

-  Так обозначается группа задач и вопросов, которые *учат делать выводы*, т.е. получать следствия из условия задачи. С помощью этих заданий вы можете проверить, усвоен ли вами основной теоретический материал. Уметь справляться с такими заданиями должен каждый ученик.
-  Так отмечены *задания для самоконтроля*; в них нужно не только получить следствие из условия задачи, но и *выяснить причину появления этого следствия*.

Примерно к половине всех заданий в конце учебника приводятся ответы.

Ориентироваться в учебнике вам помогут условные обозначения



Вопросы, которые помогают понять тему, сделать вывод.



Обратите особое внимание!

Структура учебника

Учебник разбит на разделы, разделы – на главы, а каждая глава – на параграфы. Каждый параграф обозначается двумя числами: число слева от точки – номер главы, а число справа от точки – номер параграфа в этой главе. В каждой главе рассматривается своя тема, а в каждом параграфе – отдельные вопросы этой темы. Большие по объёму параграфы дополнительно разбиты на пункты. Каждый пункт обозначается тремя числами: первое – номер главы, второе – номер параграфа в этой главе, третье – номер пункта в этом параграфе.

В конце книги помещены **приложения**, которые помогут вам быстрее найти нужную информацию: *тематический указатель, указатель аксиом, указатель определений и указатель теорем.*

Кроме перечисленных выше обозначений, вы встретите на страницах книги и другие знаки, смысл и предназначение которых сейчас будут объяснены.

Некоторые утверждения в геометрии принимают без доказательства, их называют аксиомами. Аксиомы выделяются вот так:

Аксиома n

Буква n обозначает порядковый номер аксиомы в учебнике.

Когда мы даём изучаемому в учебнике понятию точное определение, мы выделяем его вот так:

Определение n

Буква n обозначает порядковый номер определения в учебнике. Определения, которые должен знать каждый учащийся, выделены в указателе определений жирным шрифтом.

В тех случаях, когда мы формулируем и доказываем теорему, она выделяется вот так:

Теорема n

Буква n обозначает порядковый номер теоремы в учебнике.

Каждое доказательство теоремы начинается словом «Доказательство». В конце доказательства ставится знак ■, который означает, что доказательство проведено полностью. Обязательные для изучения на базовом уровне теоремы в указателе теорем выделены жирным шрифтом.

Работая по нашему учебнику, вы не только узнаете много нового, не только научитесь решать большое количество разнообразных геометрических задач, но и приобретёте важнейшее умение – учиться самостоятельно:

- ставить учебную цель;
- планировать своё движение к цели и действовать по плану;
- оценивать результаты своего труда.

ГЛАВА 1

АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ИЗУЧЕНИЮ КУРСА ГЕОМЕТРИИ. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ

Труд Евклида будет жить ещё долго после того, как все учебники наших дней будут заменены другими и забыты. Это один из самых замечательных памятников античности.

*Томас Литтл Хизс
(английский историк науки, 1861–1940)*



Евклид

§ 1.1



НЕОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ПОНЯТИЯ В ШКОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Традиционно курс геометрии состоит из двух частей – планиметрии и стереометрии. В нашем учебнике мы старались изучать единый курс геометрии и при этом уже с 7-го класса имели дело с фигурами и на плоскости, и в пространстве. Мы называем это «*ранний выход в пространство*».

Так же, как и в курсе геометрии 7–9-го классов, мы будем определять различные фигуры, но некоторые фигуры при этом будут *неопределяемыми*.

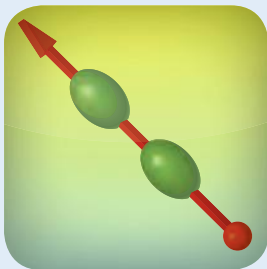
На первых страницах учебника геометрии для 7–9-го классов перечислялись неопределяемые фигуры (они также были названы *основными*): *точка, прямая, плоскость, пространство*. Рассматривалось также неопределяемое понятие *расстояние* от одной точки до другой. В курсе геометрии 10–11-го классов остаётся тот же список неопределяемых понятий, его менять мы не будем.

В нашем курсе будут также встречаться и другие неопределяемые понятия, например величина, множество и т.д. Эти понятия являются общематематическими, и мы постоянно будем их использовать.

В 7-м классе мы уже давали определение понятия «*геометрическая фигура*». Повторим его.

Определение 1. Любое множество точек называется *геометрической фигурой*.

Иногда говорят, что *пространство* – это множество всех точек.



АКСИОМАТИКА КУРСА ГЕОМЕТРИИ

Наш курс геометрии строится с использованием аксиоматического метода, лежащего в основе его логической структуры.

Этот метод включает в себя следующее:

- перечисляются основные неопределяемые понятия;
- формулируются аксиомы, описывающие свойства основных понятий;
- используя неопределяемые понятия, даются определения других понятий;
- на основании вышеизложенного доказываются теоремы, выражающие свойства и признаки различных геометрических фигур.

В этом параграфе мы опишем систему аксиом нашего курса геометрии.

Аксиомы – утверждения, принимаемые без доказательства, – отражают свойства основных понятий геометрии. Свойства фигур, имеющиеся в аксиомах, как правило, интуитивно очевидны.

1.2.1 АКСИОМЫ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

При любом построении курса геометрии начинают с аксиом, описывающих свойства точек, прямых и плоскостей.

Аксиома 1. Существует хотя бы одна прямая и хотя бы одна плоскость. Каждая прямая и каждая плоскость есть несовпадающее с пространством непустое множество точек. Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.

Аксиома 2 (аксиома плоскости). Через любые три точки пространства проходит плоскость, причём если эти три точки не принадлежат одной прямой, то проходящая через них плоскость единственная.

Плоскость, проходящую через точки A , B и C , не принадлежащие одной прямой, будем обозначать ABC .

Аксиома 3 (аксиома прямой и плоскости). Прямая, проходящая через две различные точки плоскости, лежит в этой плоскости.

Выражение «прямая a лежит в плоскости α » (рис. 1.1) на языке множеств означает, что прямая a является подмножеством плоскости α , т.е. $a \subset \alpha$. Иначе говорят: «прямая a содержится в плоскости α », а также «плоскость α проходит (проведена) через прямую a ».

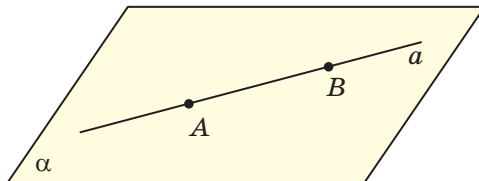


Рис. 1.1

Аксиома 4 (аксиома пересечения плоскостей). Если две различные плоскости имеют общую точку, то их пересечение есть прямая.

На рис. 1.2 изображены две плоскости, имеющие общую точку M , их пересечением является прямая b ($\alpha \cap \beta = b$).

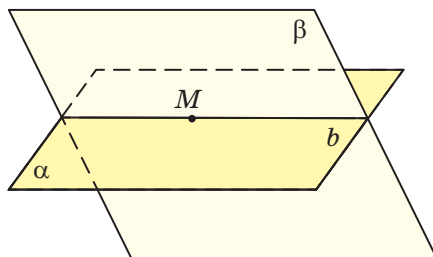


Рис. 1.2

1.2.2 ПРЯМЫЕ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

В учебнике геометрии для 7–9-го классов мы сформулировали следующую аксиому:

Аксиома 5 (аксиома прямой на плоскости). Через любые две различные точки плоскости проходит одна и только одна прямая.

Прямую, проходящую через точки A и B , обозначают AB .

Возникает вопрос: «А что будет, если в формулировке в аксиомы 5 убрать слова о том, что две различные точки лежат в плоскости?» Ока-

зывается, утверждение «через любые две различные точки пространства проходит одна и только одна прямая» – это теорема, которую мы докажем в следующем параграфе.

1.2.3 ЕЩЁ ТРИ АКСИОМЫ ПРОСТРАНСТВА

При нашем построении курса геометрии нам будет нужна *аксиома расстояния*, которая уже была сформулирована в нашем учебнике геометрии для 7–9-го классов. Приведём ещё раз формулировку этой аксиомы.

Аксиома 6 (аксиома расстояния). Для любых двух точек A и B пространства однозначно определено некоторое неотрицательное число AB , называемое расстоянием между ними и обладающее следующими свойствами:

- 1) $AB = BA$;
- 2) $AB = 0$ тогда и только тогда, когда точки A и B совпадают;
- 3) $AC \leq AB + BC$, причём равенство достигается в том и только в том случае, когда точка B лежит на отрезке AC .

Ещё одна аксиома связана с понятием *полупространства*.

Определение 2. Полупространством, определяемым плоскостью α , называется пространственная геометрическая фигура, обладающая следующими свойствами:

- 1) она содержит плоскость α , не совпадая с ней;
- 2) если концы отрезка лежат в полупространстве, но не принадлежат плоскости α , то и весь отрезок не имеет общих точек с плоскостью α (рис. 1.3а);
- 3) если один из концов отрезка принадлежит полупространству, а другой – нет, то отрезок имеет с плоскостью α одну общую точку (рис. 1.3б).

Аксиома 7 (аксиома о разбиении пространства плоскостью). Любая плоскость разбивает пространство на два полупространства.

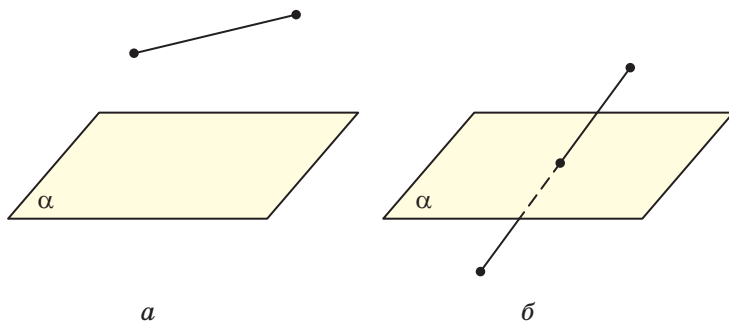


Рис. 1.3

В заключение скажем об одной из наиболее важных и известных аксиом геометрии – *аксиоме параллельных на плоскости*, которая была рассмотрена в учебнике геометрии для 7–9-го классов.

Аксиома 8 (аксиома параллельных на плоскости). Через точку, не лежащую на данной прямой, нельзя провести более одной прямой, параллельной данной.

Напомним также: в учебнике геометрии для 7–9-го классов было доказано, что на плоскости одну прямую, параллельную данной, провести можно.

Оказывается, утверждение «в пространстве через точку, не лежащую на данной прямой, нельзя провести более одной прямой, параллельной данной» является теоремой, которую мы докажем немного позже, в параграфе 1.5 (теорема 5).

§ 1.3



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПЕРВЫХ ТЕОРЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ

Если аксиомы принимаются без доказательства, то утверждения, которые необходимо доказать, называются *теоремами*, а проводимые при этом рассуждения есть попытки *доказательства теорем*. В этих рассуждениях (доказательствах) мы опираемся на аксиомы, определения и уже доказанные теоремы. При проведении доказательств теорем мы овладеваем некоторыми методами доказательств.

Каждая доказываемая теорема состоит из двух частей:

- а) *данные теоремы (условие теоремы)*;
- б) *утверждение, которое требуется доказать (заключение теоремы)*.

После изучения условия теоремы обычно строят чертёж (рисунок), на который опираются при доказательстве. При доказательстве некоторых теорем используют несколько чертежей. Некоторые теоремы можно доказывать и без чертежей.

Докажем несколько первых теорем нашего курса геометрии, где говорится о свойствах пространства.

Теорема 1. Через две различные точки пространства проходит единственная прямая.

Доказательство

1. В пространстве произвольным образом выбраны две различные точки A и B (рис. 1.4а).

2. Требуется доказать, что через точки A и B проходит единственная прямая.

Для построения прямой нам нужна плоскость, в которой будет выполняться это построение.

3. Возьмём точку C , отличную от точек A и B (рис. 1.4б).

Мы получили три различные точки.

4. Через точки A , B и C по аксиоме 2 можно провести плоскость. Построим эту плоскость, обозначив её α (рис. 1.4в).

5. Построим прямую a , проходящую через точки A и B в плоскости α (аксиома 5) (рис. 1.4г).

Существование прямой доказано, теперь докажем её единственность.

6. Предположим, что кроме прямой a существуют ещё прямые, проходящие через точки A и B .

7 (2). Докажем, что это невозможно. Если существует другая прямая b , проходящая через точки A и B , то по аксиоме 3 она лежит в плоскости α , и тогда в этой плоскости α через точки A и B можно провести две различные прямые – a и b , что противоречит аксиоме 5. ■

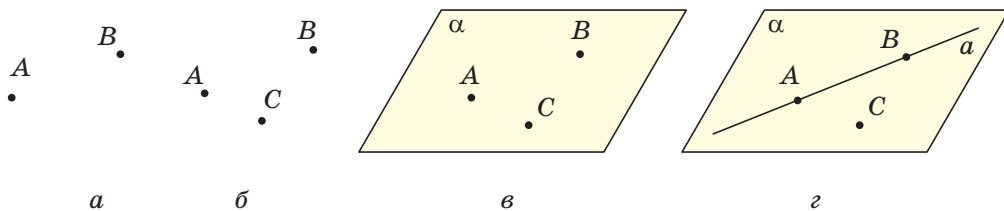


Рис 1.4

Теорема 2. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит одна и только одна плоскость.

Доказательство

1. Прямая a .
2. Точка C , не лежащая на прямой a .
3. Через прямую a и точку C можно провести плоскость, причём только одну (требуется доказать).
4. Отметим на прямой a две различные точки A и B (построение) (рис. 1.5б).
5. Точки A , B и C не лежат на одной прямой. По аксиоме 2 через точки A , B и C проходит некоторая, однозначно определённая плоскость α (рис. 1.5в).

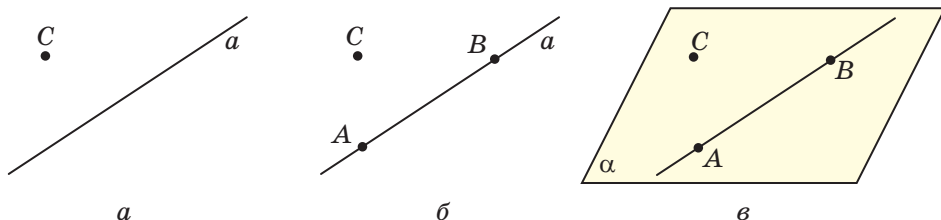
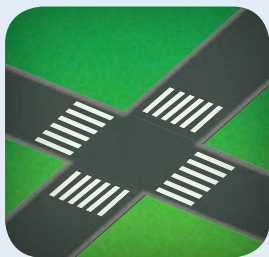


Рис. 1.5

6. Точки A и B принадлежат этой плоскости, поэтому в силу аксиомы 3 (аксиомы прямой и плоскости) прямая a лежит в плоскости α .
7. Таким образом, $a \subset \alpha$ и $C \in \alpha$, т.е. плоскость α искомая.
Докажем единственность этой плоскости.
- 8 (3). Любая плоскость, проходящая через прямую a и точку C , будет проходить через три не лежащие на одной прямой точки A , B и C , а значит, по аксиоме 2 совпадать с плоскостью α . ■



ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ

1.4.1 ПОНЯТИЕ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ

На рис. 1.6 изображены две прямые a и b , которые имеют только одну общую точку A .

Определение 3. Если две прямые имеют только одну общую точку, то они называются *пересекающимися*.

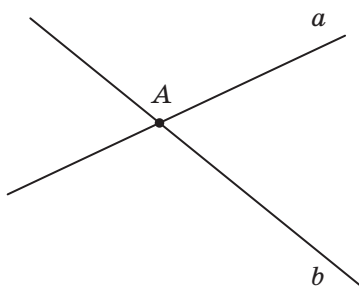


Рис. 1.6

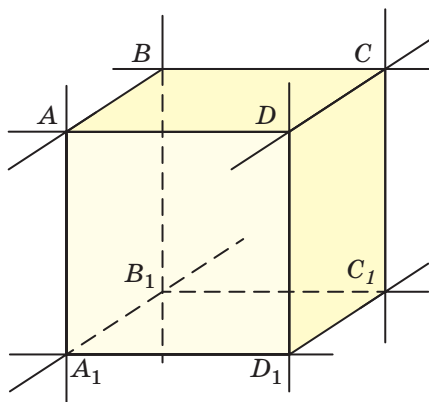


Рис. 1.7

Продлим в обе стороны все рёбра куба, и мы получим 12 прямых (рис. 1.6). Обратите внимание на то, что в каждой вершине куба пересекаются три прямые.

Сначала установим, что две пересекающиеся прямые обязательно лежат в одной плоскости. Докажем такую теорему:

Теорема 3. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, причём единственная.

Доказательство

1. Две прямые a и b пересекаются в точке C (дано) (рис. 1.8а).
2. Требуется доказать, что через прямые a и b проходит единственная плоскость.

Согласно аксиоме плоскости (A2), через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит одна и только одна плоскость. Таким образом, для проведения единственной плоскости нам нужно иметь три точки, не лежащие на одной прямой. Одна точка у нас есть – точка C .

3. Отметим на прямой a точку A , отличную от точки C , а на прямой b – точку B , отличную от точки C (построение) (рис. 1.8б).

4. Имеем три точки A , B и C , не лежащие на одной прямой (1, 3).

5. Точки A , B и C определяют единственную плоскость α (3, A2) (рис. 1.8в).

6. Так как точки A и C лежат в плоскости α , то по аксиоме 3 проходящая через них прямая a лежит в плоскости α . По аналогичной причине прямая b лежит в плоскости α .

Таким образом, построена плоскость α , проходящая через две пересекающиеся прямые a и b . Существование плоскости доказано. Осталось доказать, что плоскость α – единственная.

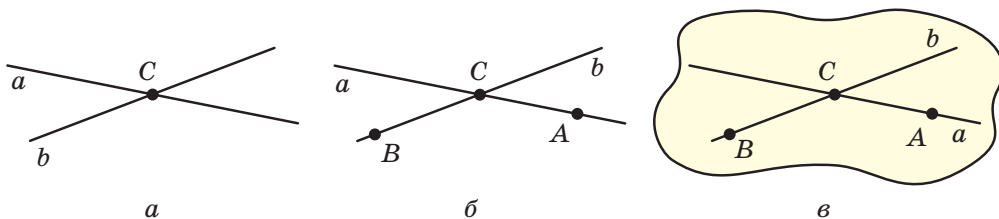


Рис. 1.8

7. Допустим, что через прямые a и b проходит ещё одна плоскость β .
- 8 (2). Плоскость β проходит через точки A , B и C , а значит, в соответствии с аксиомой 2 совпадает с плоскостью α . ■

С понятием пересекающихся прямых связано ещё одно понятие – *угол между двумя прямыми в пространстве*.

Определение 4. Углом между двумя пересекающимися прямыми в пространстве называется угол между этими прямыми в плоскости, содержащей эти прямые.

Напомним, что углом между пересекающимися прямыми на плоскости считается наименьший из четырёх углов, образующихся при их пересечении*, т.е. либо острый угол, либо прямой угол.

* Эти четыре угла образуют две пары вертикальных углов.

1.4.2 ПОНЯТИЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМЫХ

Важный случай пересечения двух прямых – когда они, пересекаясь, образуют прямые углы. Такие прямые называются *перпендикулярными*.

Определение 5. Две пересекающиеся прямые называются *перпендикулярными*, если они пересекаются под прямым углом.

Перпендикулярность прямых обозначается знаком « $\perp$ ». Запись « $a \perp b$ » читается: «прямая a перпендикулярна прямой b », или «прямые a и b перпендикулярны».

На рис. 1.9 прямые a и b пересекаются в точке O под прямым углом. Согласно определению 5, $a \perp b$.

Рассмотрим некоторые свойства перпендикулярных прямых в пространстве. В § 8.2 «Построение перпендикулярных прямых» учебника геометрии для 7–9-го классов мы учились строить на плоскости прямую, перпендикулярную данной и проходящую через данную точку.

В пространстве мы будем поступать так. Рассмотрим произвольную точку O данной прямой l в пространстве (рис. 1.10).

Возьмём произвольную точку вне прямой l . По теореме 2 через эту точку и прямую l проходит единственная плоскость. В каждой такой плоскости, содержащей прямую l , мы можем провести перпендикулярную к l прямую, проходящую через точку O . В дальнейшем мы покажем, что все эти перпендикулярные к l прямые «заметают» плоскость, в которой любая прямая, проходящая через точку O , будет перпендикулярна прямой l (рис. 1.11).

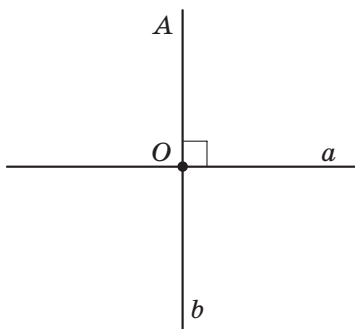


Рис. 1.9



Рис. 1.10

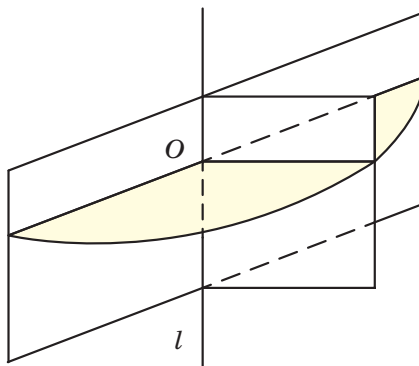


Рис. 1.11

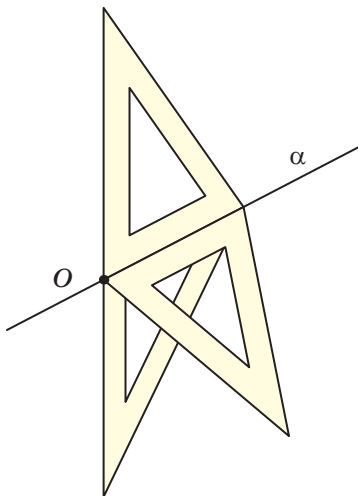


Рис. 1.12

Ответим на такой вопрос: «Есть ли разница в построении прямой, перпендикулярной к данной прямой, с помощью угольника и линейки на плоскости (на листе бумаги или на доске) и в пространстве?»

Пусть точка O лежит на прямой a . Представим, что мы прикладываем к прямой a угольник. В пространстве угольник может как угодно «крутиться» вокруг прямой и занимать бесчисленное множество различных положений (рис. 1.12).

Таким образом, *в пространстве через точку, принадлежащую данной прямой, можно провести сколько угодно перпендикулярных прямых, проходящих через данную точку.*

Если точка O лежит на прямой a , то через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость и в ней построить прямую, перпендикулярную к данной прямой.

Так же, как и на плоскости, мы будем использовать термин «*перпендикуляр к прямой*». На рис. 1.9 отрезок OA является перпендикуляром к прямой a .

§ 1.5



ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

1.5.1 СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ

В учебнике геометрии для 7–9-го классов мы достаточно подробно изучали свойства параллельных прямых. Было дано такое определение:

Определение 6. Две прямые называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

Параллельность прямых обозначается знаком « $\parallel$ ». Запись « $a \parallel b$ » читается так: «прямая a параллельна прямой b » или «прямые a и b параллельны».

На рис. 1.13 изображены две параллельные прямые. Напомним, что фразу «изображены прямые» не надо понимать буквально. Поскольку прямые бесконечны, то мы можем изобразить на рисунке только отрезки этих прямых.

Принадлежащие параллельным прямым отрезки и лучи тоже будем называть параллельными.

В повседневной жизни нам часто встречаются параллельные прямые (вернее, их отрезки). Например, на рис. 1.14 изображены рельсы железнодорожного полотна, которые укладываются параллельно друг другу.

Параллельными бывают части строительных конструкций. Пять параллельных отрезков составляют нотный стан (рис. 1.15).

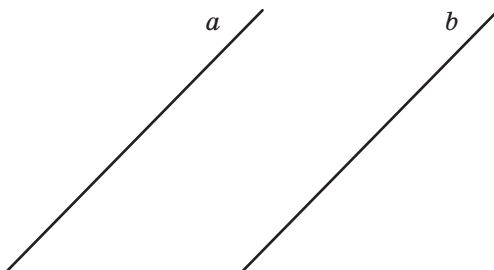


Рис. 1.13



Рис. 1.14

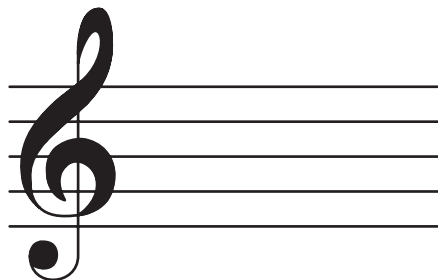


Рис. 1.15

Параллельные элементы содержат многие геометрические фигуры. Например, у квадрата и прямоугольника противоположные стороны параллельны. Параллельными являются некоторые рёбра куба и прямоугольного параллелепипеда.

Используя аксиомы геометрии, можно доказать, что плоскость, в которой лежат данные две параллельные прямые, единственная.

Теорема 4. Через две параллельные прямые проходит единственная плоскость.

Доказательство

1. Нам даны произвольные параллельные прямые l_1 и l_2 (рис. 1.16а).
2. Требуется доказать, что через прямые l_1 и l_2 проходит единственная плоскость.
3. Так как прямые l_1 и l_2 параллельны, то по определению параллельности прямых они лежат в одной плоскости α (рис. 1.16б).
Докажем единственность такой плоскости.
4. Плоскость α – единственная (требуется доказать).
5. Выберем две различные точки A и B на прямой l_1 и произвольную точку C на прямой l_2 (построение) (рис. 1.16в).

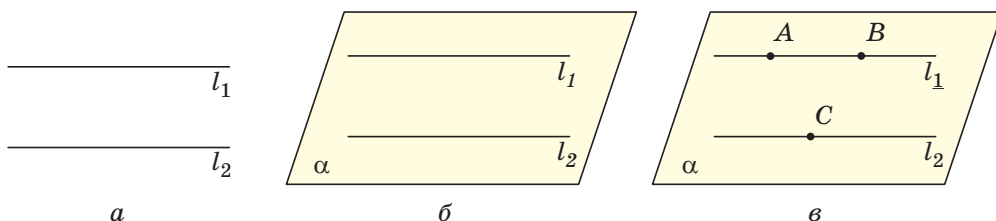


Рис. 1.16

Точки A , B , C не лежат на одной прямой. (Если бы они лежали на одной прямой, то этой прямой была бы l_1 , но точка C не может лежать на прямой l_1 , т.к. она принадлежит параллельной ей прямой l_2 .)

6. Всякая плоскость, содержащая прямые l_1 и l_2 , содержит также точки A , B и C , а такая плоскость в силу аксиомы 2 – единственная и, значит, совпадает с плоскостью α . ■

1.5.2 АКСИОМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ

В учебнике геометрии для 7–9-го классов на плоскости мы сформулировали одну из наиболее известных аксиом геометрии – аксиому параллельных (известную также под названием «пятый постулат Евклида»). Её формулировка приведена в п. 1.2.5 данного учебника. Ещё раз напомним эту формулировку:

Аксиома 8 (аксиома параллельных на плоскости). Через точку, не лежащую на данной прямой, нельзя провести более одной прямой, параллельной данной.

В пространстве можно доказать такую теорему:

Теорема 5. Через точку в пространстве, не лежащую на данной прямой, можно провести единственную прямую, параллельную этой прямой.

Доказательство

1. Прямая l в пространстве и точка M вне этой прямой (дано) (рис. 1.17а).
2. По теореме 2 существует единственная плоскость α , проходящая через прямую l и точку M (рис. 1.17б) (1, Т2).
3. В учебнике геометрии для 7–9-го классов мы доказали, что в плоскости α существует прямая l_1 , проходящая через точку M и параллельная прямой l (рис. 1.17в).

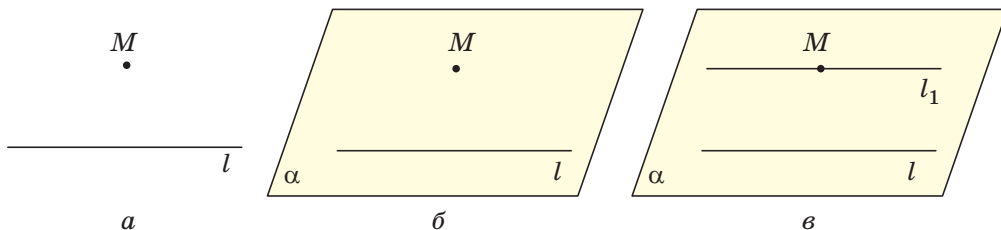


Рис. 1.17

Таким образом, мы доказали существование прямой в пространстве, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой.

Теперь докажем единственность такой прямой.

4. Предположим, что в пространстве есть еще одна прямая l_2 , проходящая через точку M и параллельная прямой l (предположение).

5. Тогда по теореме 4 существует плоскость α_1 , содержащая параллельные прямые l и l_2 . Но так как плоскость α_1 содержит прямую l и точку M , она, согласно теореме 3, должна совпасть с плоскостью α .

6 (2). Прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости α с прямой l , обе параллельны ей и обе проходят через точку M . Значит, в силу аксиомы 8, прямые l_1 и l_2 совпадают. ■

В курсе геометрии 7–9-го классов с помощью аксиомы параллельных были доказаны различные теоремы, например, *теорема о свойстве транзитивности параллельных прямых на плоскости*.

Теорема 6. Если прямые a и b параллельны прямой c , то прямые a и b параллельны или совпадают.

Оказывается, эта теорема верна и для прямых, расположенных в пространстве.

На рис 1.18 изображены прямые a , b и c в пространстве (параллельные прямые a и c лежат в плоскости α , а параллельные прямые b и c лежат в плоскости β , т.е. $a \parallel c$ и $b \parallel c$).

Скоро мы сможем доказать эту теорему. Это будет сделано в § 2.6.

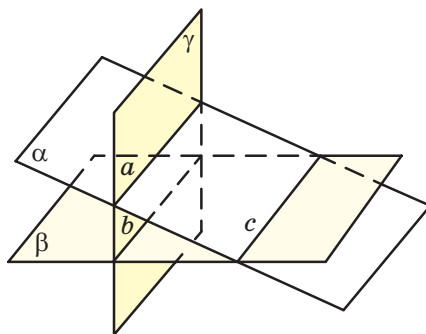


Рис. 1.18



СКРЕЩИВАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ И ИХ СВОЙСТВА

Из учебника геометрии для 7–9-го классов (§ 9.1) вы уже узнали о том, что кроме пересекающихся и параллельных прямых, которые лежат в одной плоскости, существуют прямые, которые не лежат в одной плоскости. Такие прямые называются *скрещивающимися*.

Очень важно правильно понимать смысл фразы «прямые не лежат в одной плоскости». Он таков: *не существует ни одной плоскости, в которой лежали бы обе эти прямые*.

1.6.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКРЕЩИВАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ

Определение 7. Две прямые называются *скрещивающимися*, если они не пересекаются и не параллельны.

Докажем существование скрещивающихся прямых, исходя из определения 7.

Доказательство

1. Дана плоскость α (рис. 1.19а).
2. В плоскости α проведём прямую a и выберем в этой плоскости точку M , не принадлежащую прямой a (построение) (рис. 1.19а).
3. Возьмем вне плоскости α точку N и через точки M и N проведём прямую b (построение) (рис. 1.19б).
4. Докажем, что прямые a и b – скрещивающиеся.
Вспользуемся методом доказательства от противного.
5. Предположим, что прямые a и b пересекаются или параллельны. Тогда обе они лежат в некоторой плоскости β (рис. 1.19в).
6. Плоскости α и β совпадают (обе они проходят через прямую a и точку M вне прямой a) (1, 2, 3, 5, Т.2).

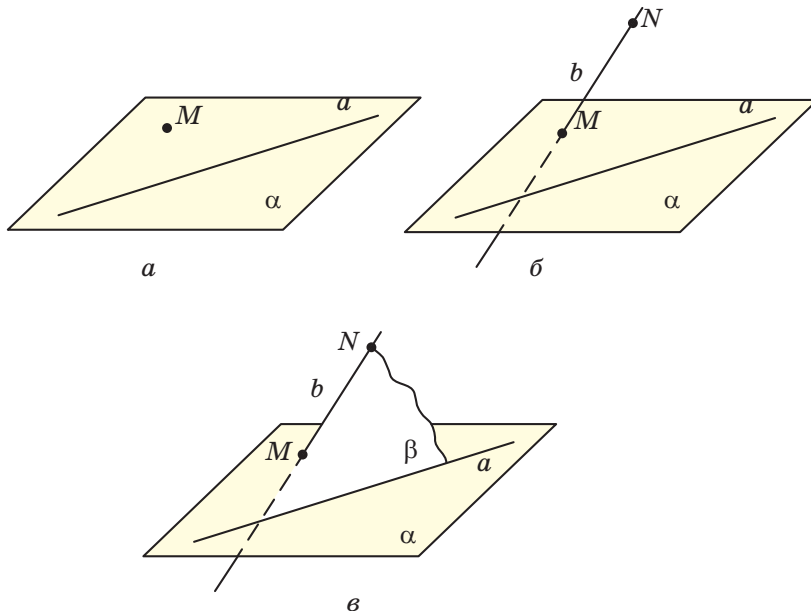


Рис. 1.19

7. Плоскость β проходит через точку N , не принадлежащую плоскости α (3).

8(4). Пункты 6 и 7 противоречат друг другу, т.е. наше предположение неверно. Следовательно, прямые a и b – скрещивающиеся. ■

Мы доказали следующую теорему – признак скрещивающихся прямых.

Теорема 7. Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то такие прямые скрещиваются.

Скрещивающиеся прямые можно определить и по-другому:

Определение 8. Две прямые называются *скрещивающимися*, если они не лежат в одной плоскости*.

Докажем теорему 7, используя определение 8.

* Как сказано выше, это значит, что не существует такой плоскости, в которой лежали бы обе прямые.

Доказательство

Воспользуемся рисунком 1.19.

1. Так как прямая MN имеет только одну общую точку с плоскостью α (точку M), а точка N не лежит в плоскости α , то прямые MN и a не лежат в одной плоскости.

2. Если допустить, что прямые MN и a лежат в одной плоскости, то эта плоскость, очевидно, проходит через прямую a и точку M и поэтому совпадает с плоскостью α .

3. Это невозможно, так как точка N не принадлежит плоскости α . ■

Интуитивно ясно, что определения 7 и 8 равносильны (правда, следует отметить, что в школьной практике о равносильности определений практически не говорят, да и вообще разные варианты определений одного и того же понятия не рассматривают, а жаль!).

Для обозначения скрещивающихся прямых a и b будем иногда применять запись « $a \underline{\bullet} b$ », которая читается так: «прямые a и b – скрещивающиеся».

1.6.2 ПОСТРОЕНИЕ СКРЕЩИВАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ

Доказанный в разделе 1.6.1 признак скрещивающихся прямых помогает строить такие прямые.

Например, на рис. 1.20 прямые AB и CD расположены так, что прямая CD лежит в плоскости α , а прямая AB пересекает плоскость α в точке B . Значит, по теореме 7 прямые AB и CD являются скрещивающимися.

Таким образом, для построения двух скрещивающихся прямых a и b мы выполняем следующие построения:

- 1) строим в пространстве плоскость α ;
- 2) на плоскости α проводим произвольную прямую CD ;
- 3) на плоскости α берём произвольную точку B , не принадлежащую прямой CD ;

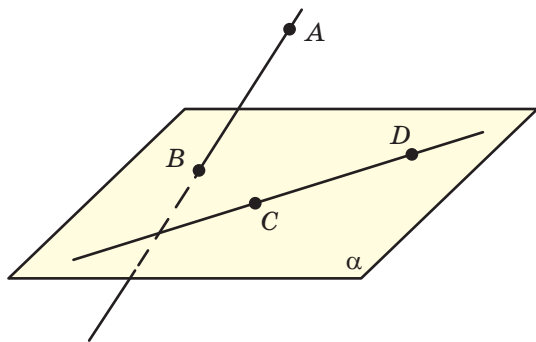


Рис. 1.20

- 4) вне плоскости α берём произвольную точку A ;

- 5) через точки A и B проводим прямую AB .

Так как прямые AB и CD удовлетворяют условиям теоремы 7, то они скрещиваются. Таким образом, в признаке содержится способ построения скрещивающихся прямых, что убеждает нас в их существовании. Поэтому этот признак называют ещё *теоремой существования скрещивающихся прямых*.

ЗАДАЧИ К § 1.1 – 1.3

Н



- 1 Какое общее определение геометрической фигуры имеется в курсе геометрии?
- 2 Какие фигуры являются плоскими? Какие фигуры являются пространственными? Приведите примеры таких фигур.
- 3 Какие неопределяемые понятия относятся к плоскости?
- 4 Какие неопределяемые понятия относятся к пространству?
- 5 Сформулируйте аксиомы принадлежности пространства.
- 6 Сколько различных плоскостей имеется в пространстве?
- 7 Сколько различных точек содержит пространство?
- 8 Сформулируйте аксиому расстояния для пространства.
- 9 Где по отношению к поверхности кубика находятся точки A , B , C и D (рис. 1.21)?

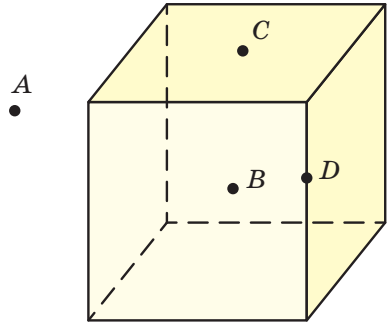


Рис. 1.21

Н



- 10 Являются ли геометрическими фигурами точка, прямая, плоскость, пространство? Как называются эти фигуры?
- 11 Являются ли геометрическими фигурами:
 - а) пересечение прямой a и плоскости α ?
 - б) пересечение двух плоскостей?
- 12 Дан шар. Внутри него и снаружи находятся частицы воздуха – точки. Как можно отличать друг от друга внутренние и внешние частицы воздуха – точки?
- 13 У нас имеется куб. Как можно описать свойства точек, являющихся внутренними по отношению к поверхности куба; как можно описать свойства точек, лежащих вне поверхности куба; как можно описать свойства точек, принадлежащих поверхности куба?
- 14 Могут ли прямая и плоскость иметь только одну общую точку? Могут ли прямая и плоскость иметь только две общие точки? Могут ли две плоскости иметь только одну общую точку?

- 15** Даны плоскость α и прямоугольник $ABCD$. Может ли плоскости α принадлежать: а) только одна вершина прямоугольника; б) только две его вершины; в) только три вершины?
- 16** Две вершины треугольника принадлежат плоскости. Обязательно ли принадлежит ей третья вершина, если известно, что данной плоскости принадлежит:
- а) центр вписанной в треугольник окружности;
 - б) центр описанной около него окружности?
- 17** а) Могут ли две различные плоскости иметь две различные общие прямые?
б) Почему пересечение двух плоскостей не может быть отрезком?

Н

- 18** Нам даны три различные точки на плоскости. Как они могут быть расположены на этой плоскости?
- 19** Нарисуйте плоскости α и β , пересекающиеся по прямой a .
- 20** Нарисуйте плоскость α и лежащую в ней точку M . Запишите это символически.
- 21** Точки A и B лежат в плоскости α , а точка C – вне неё. Нарисуйте плоскость, в которой лежат все три точки.
- 22** Плоскости α и β , прямая a и точка A удовлетворяют следующим условиям: $a \subset \alpha$, $a \subset \beta$, $A \in \beta$, $A \notin \alpha$. Изобразите это на рисунке.
- 23** Плоскости α и β пересекаются по прямой a , плоскости β и γ – по прямой b , а плоскости α и γ – по прямой c , причём $a \parallel b$ и $b \parallel c$. Изобразите это на рисунке.

П

- 24** Как могут располагаться 4 точки в пространстве?
- 25** Как могут располагаться 5 точек в пространстве?
- 26** Как расставить в комнате:
- а) 7 стульев так, чтобы у каждой из четырёх стен комнаты стояло по 2 стула;
 - б) 9 стульев так, чтобы у каждой из четырёх стен комнаты стояло по 3 стула;
 - в) 10 стульев так, чтобы у каждой стены комнаты стояло по 3 стула;
 - г) 12 стульев так, чтобы в двух рядах было по 4 стула, а в одном 6;
 - д) 12 стульев так, чтобы у каждой из четырёх стен было по 4 стула;
 - е) 12 стульев так, чтобы два стула стояли посередине комнаты, а остальные – вдоль четырёх стен поровну;
 - ж) 16 стульев, чтобы у каждой из четырёх стен комнаты стояло по 4 стула;
 - з) 16 стульев, чтобы у каждой из четырёх стен комнаты стояло по 5 стульев?

27 Прямая a пересекает плоскость α в точке A . В плоскости α дана ещё точка B . Плоскость β проходит через прямую a и точку B . Сделайте соответствующий рисунок.

28 Как в пространстве могут располагаться две различные плоскости?

29 Как в пространстве могут располагаться три различные плоскости?

30 Плоскости α и β имеют общую точку A (рис. 1.22). Имеют ли эти плоскости общие точки, отличные от A ? Сколько их? Изобразите их на рисунке.

31 В плоскости α лежат точки A и B , в плоскости β – точки B и C , в плоскости γ – точки A , B , C . Сделайте соответствующий рисунок.

32 Точки A , B , C , D не лежат в одной плоскости. Докажите, что никакие три из них не лежат на одной прямой.

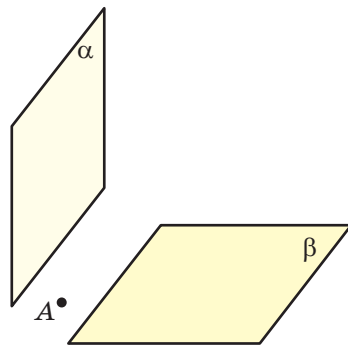


Рис. 1.22

ЗАДАЧИ К § 1.4 – 1.5



33 На рис. 1.23 изображён куб $ABCA_1B_1C_1D_1$. Назовите пары пересекающихся прямых, содержащих рёбра куба.

34 Перечислите все рёбра прямоугольного параллелепипеда (рис. 1.24), для которых содержащая их прямая параллельна прямой BB_1 .

35 Дан куб $ABCA_1B_1C_1D_1$ (рис. 1.23). Назовите прямые, содержащие рёбра куба, параллельные прямой, содержащей ребро AB . Сколько существует прямых, содержащих рёбра куба, параллельных прямой, содержащей ребро AA_1 ?

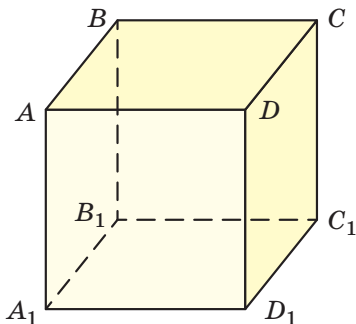


Рис. 1.23

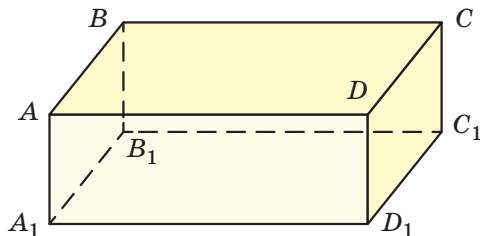


Рис. 1.24

- 36** Перечислите все рёбра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 1.23), для которых содержащие их прямые: а) не имеют общих точек с прямой BB_1 ; б) проходят через две вершины куба, отличные от B и D_1 , и не имеют общих точек с прямой CC_1 .



- 37** Может ли какая-нибудь прямая, содержащая ребро куба, не иметь общих точек:
- а) только с одним ребром куба; б) только с двумя рёбрами куба; в) с тремя рёбрами куба?
- 38** Можно ли через точку A , лежащую вне прямой a , провести прямую, параллельную прямой a ? Сколько таких прямых можно провести?
- 39** На рис. 1.25 изображена треугольная пирамида. Есть ли на этом рисунке прямые, содержащие рёбра треугольной пирамиды, параллельные между собой?
- 40** На рис. 1.26 изображена четырёхугольная пирамида.
- а) Есть ли на этом рисунке прямые, содержащие рёбра четырёхугольной пирамиды, параллельные ребру AS ?
- б) Какие прямые, содержащие её рёбра, пересекают прямую AB ? не пересекают AB ?

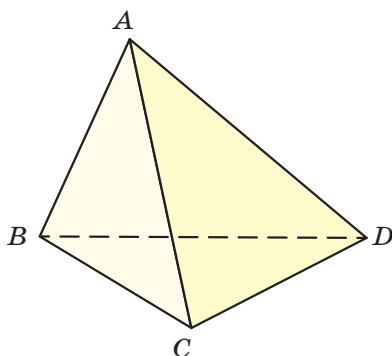


Рис. 1.25

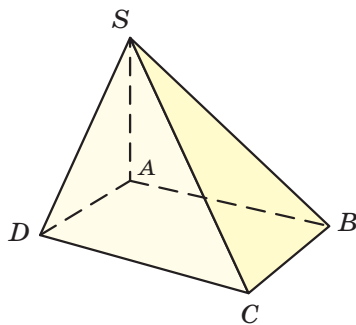


Рис. 1.26



- 41** Каково взаимное расположение прямых a и b , a и c , b и c , если:
- 1) $a \perp c$, $b \perp c$; 2) $a \perp b$, $c \perp b$; 3) $a \perp b$, $c \perp a$?
- 42** Проведите прямую, пересекающую две данные прямые a и b и проходящую через точку A . Всегда ли задача имеет решение?
- 43** Проведите прямую, параллельную данной прямой и пересекающую две данные прямые.

44 В пространстве проведено несколько прямых, не проходящих через одну точку, причём любые две из них пересекаются. Докажите, что все эти прямые лежат в одной плоскости.

45 Пусть A, B, C и D – четыре точки в пространстве. Докажите, что середины отрезков AB, BC, CD и DA служат вершинами параллелограмма (рис. 1.27).

46 Пусть через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость, не содержащая другую прямую. Докажите, что если эти плоскости пересекаются, то их линия пересечения параллельна каждой из данных прямых.

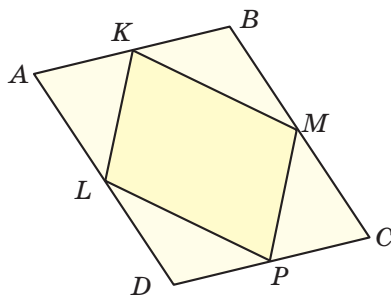


Рис. 1.27

ЗАДАЧИ К § 1.6

Задачи к этому параграфу мы разделили на два раздела.

Задачи, решение которых готовит введение понятия скрещивающихся прямых



47 На рис. 1.28 продлены некоторые линии пересечения стен и потолка в вашем классе. Ответьте на следующие вопросы:

а) какие из отмеченных линий лежат в одной плоскости; б) какие из отмеченных линий не лежат в одной плоскости?

48 На рис. 1.29 изображена треугольная пирамида $ABCD$, рёбра которой продлили в обе стороны. Назовите прямые: а) содержащие рёбра пирамиды, которые лежат в одной плоскости; б) содержащие рёбра пирамиды, которые не лежат в одной плоскости; в) прямые, имеющие с прямой AB единственную общую точку; г) все пары прямых, содержащих рёбра пирамиды, не имеющих общих точек.

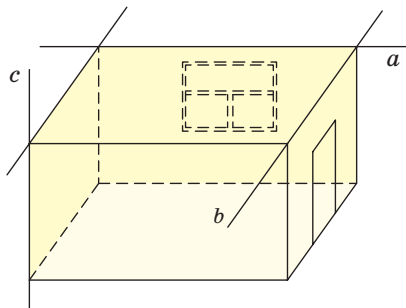


Рис. 1.28

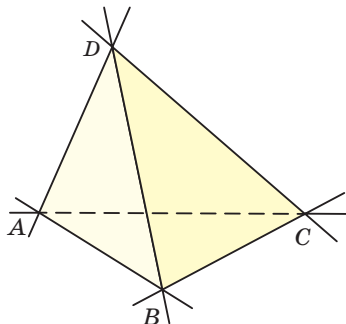


Рис. 1.29

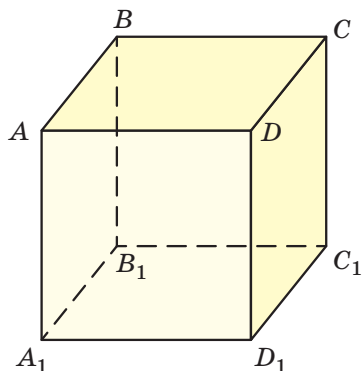


Рис. 1.30

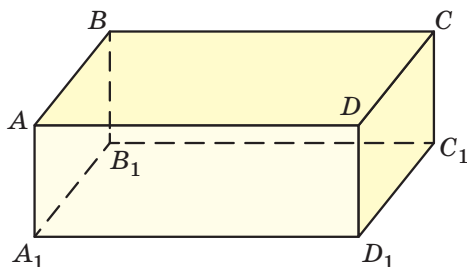


Рис. 1.31

- 49** Дан куб $ABCA_1B_1C_1D_1$ (рис. 1.30). Какие рёбра этого куба лежат на прямых, которые скрещиваются: а) с прямой AD ; б) с прямыми AD и DD_1 ?
- 50** Выберите на модели куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ (рис. 1.30) какое-нибудь ребро, например AA_1 . Перечислите прямые, содержащие другие рёбра куба и не пересекающие прямую AA_1 . Назовите те, которые: а) параллельны прямой AA_1 ; б) не лежат с прямой AA_1 в одной плоскости.
- 51** На рис. 1.30 изображён куб $ABCA_1B_1C_1D_1$. Назовите несколько пар скрещивающихся прямых, содержащих рёбра этого куба.
- 52** Перечислите все рёбра прямоугольного параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ (рис. 1.31), для которых содержащая их прямая является скрещивающейся с прямой, содержащей ребро BB_1 .
- 53** Назовите рёбра треугольной пирамиды $ABCD$, лежащие на скрещивающихся прямых (рис. 1.32). Сколько таких пар рёбер есть у этой пирамиды?

П

- 54** Сложите 6 спичек так, чтобы образовалось 4 правильных треугольника.

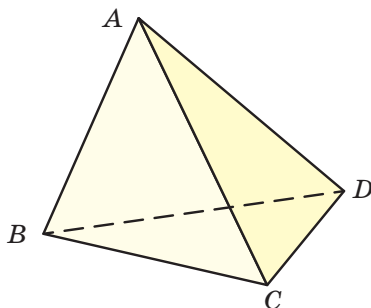


Рис. 1.32

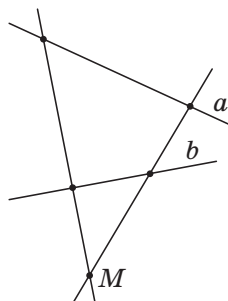


Рис. 1.33

М

- 55** Даны две скрещивающиеся прямые a и b и точка M , не принадлежащая ни одной из них. Можно ли провести через точку M две различные прямые, каждая из которых пересекает обе скрещивающиеся прямые a и b (т.е. возможна ли ситуация, изображённая на рис. 1.33)?
- 56** Можно ли сложить 6 карандашей так, чтобы любые два из них соприкасались? Такой же вопрос для 7 карандашей.

Задачи, связанные с использованием определений скрещивающихся прямых и признака существования этих прямых

Н

- 57** Даны две скрещивающиеся прямые a и b . Какими свойствами обладают эти прямые?
- 58** Заполните пропуски так, чтобы получились истинные утверждения:
- Если прямые в пространстве не имеют общих точек, то они...
 - Если две прямые не лежат в одной плоскости, то они...
 - Если $ABCD$ – треугольная пирамида (рис. 1.32), то прямые AB и CD ...
 - В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 1.30) прямая... скрещивается с прямой $A_1 D_1$, прямые AB и CC_1 ..., так как...

Н

- 59** Перечислите все рёбра прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 1.31), для которых содержащая их прямая является скрещивающейся с прямой, содержащей отрезок BA_1 .
- 60** Назовите рёбра четырёхугольной пирамиды $SABCD$, лежащие на скрещивающихся прямых (рис. 1.26). Сколько пар таких рёбер есть у этой пирамиды?

П

- 61** Пусть нам даны четыре точки A, B, C, D , не принадлежащие одной плоскости (рис. 1.34). Докажите, что прямые AB и CD скрещивающиеся.
- 62** Известно, что прямые AC и BD скрещивающиеся. Докажите, что прямые AB и CD тоже скрещивающиеся.
- 63** Даны прямая p и точка A , не принадлежащая прямой p . Постройте прямую, проходящую через точку A и скрещивающуюся с прямой p .

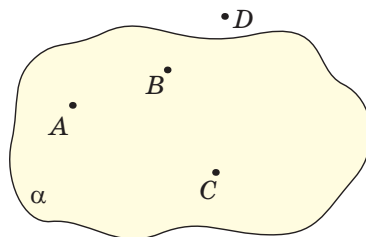


Рис. 1.34

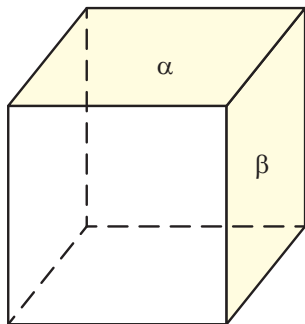


Рис.1.35

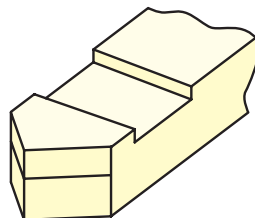


Рис. 1.36

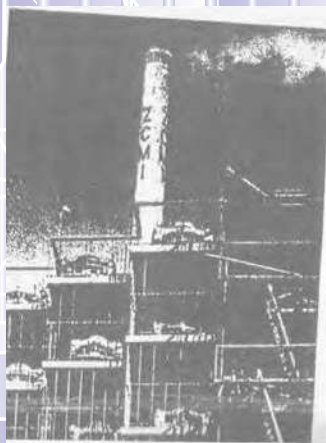
- 64** Найдите все пары скрещивающихся прямых на рис. 1.32.
- 65** Верно ли, что любые две прямые в пространстве либо параллельны, либо пересекаются?
- 66** Существуют ли две параллельные прямые, каждая из которых пересекает две данные скрещивающиеся прямые?
- 67** Обозначим через α и β плоскости двух смежных граней куба (рис.1.35). Какие из следующих высказываний истинны:
- а) существуют пересекающиеся прямые $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$;
 - б) существуют скрещивающиеся прямые $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$;
 - в) существуют параллельные прямые $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$?
- 68** На рис. 1.36 изображён токарный резец. Его кромки – отрезки некоторых прямых. Назовите различные виды расположения этих прямых.
- 69** Нарисуйте три прямые, первые две из которых пересекаются, а третья скрещивается: а) с каждой из двух пересекающихся прямых; б) только с первой из них. В случае (б) можно ли утверждать, что третья прямая пересекается со второй?

ГЛАВА 2

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

Из всех выработанных людьми курсов и систем обучения особое предпочтение надлежит отдавать теории перспективы.

*Леонардо да Винчи
(итальянский естествоиспытатель
и художник, 1452–1519)*



Центральными в этой главе будут вопросы:



Как могут располагаться прямые по отношению к плоскости? Сколько общих точек могут иметь прямая и плоскость?

Возможны следующие варианты ответов:

1. Прямая и плоскость имеют только одну общую точку. В этом случае говорят, что *прямая и плоскость пересекаются*.
2. Прямая и плоскость имеют две или больше общих точек. В этом случае *прямая лежит в плоскости* (по аксиоме прямой и плоскости – аксиоме 3).
3. Прямая и плоскость не имеют ни одной общей точки. Такие прямая и плоскость называются *параллельными*.

§ 2.1



ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Начнём с изучения свойств *пересекающихся прямой и плоскости*.

Определение 9. Прямая и плоскость называются *пересекающимися*, если они имеют только одну общую точку.

На рис. 2.1 изображены плоскость α и прямая a . Эти фигуры имеют только одну общую точку O . В соответствии с определением 9 эти прямая и плоскость являются пересекающимися.

Используется запись: $a \cap \alpha = O$. Она читается так: прямая a и плоскость α пересекаются в точке O .

Рассмотрим ситуацию, изображённую на рис. 2.2.

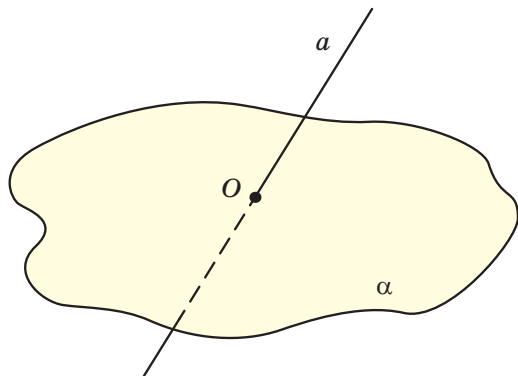


Рис. 2.1

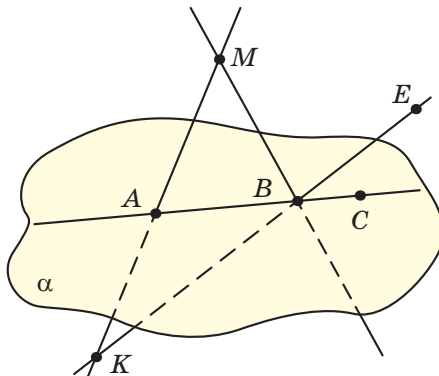


Рис. 2.2

Возникает такой вопрос:



Что можно сказать о взаимном расположении прямых и плоскости α , изображённых на рис. 2.2?

Мы видим на этом рисунке:

- а) пересекающиеся прямые MA и MB , MB и EB , AB и MA и т.д.;
- б) пересекающиеся прямые и плоскости MA и α , MB и α , EB и α ;
- в) прямую, лежащую в плоскости α , – прямую AB .

§ 2.2



МЕТОД ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

Мы уже неоднократно говорили об изображении фигур в геометрии, особенно о тех случаях, когда мы хотим на листе бумаги (на плоскости) изобразить пространственный объект.

Процесс такого изображения имеет много различных трактовок и правил. Некоторые из них связаны с закономерностями взаимного расположения

прямых и плоскостей. Сложность этого вопроса связана с тем, что мы ничего не можем нарисовать непосредственно в пространстве, так как не существует «пространственного карандаша», кончик которого оставлял бы след в воздухе. Таким карандашом можно было бы «начертить» настоящий куб, обведя его рёбра, и любой другой многогранник, но, увы, такой возможности нет (во всяком случае, в настоящее время).

2.2.1 ПОНЯТИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ

Пусть даны плоскость α и прямая l , пересекающая α (рис. 2.3). Возьмём произвольную точку A , через неё проведём прямую l_1 , параллельную прямой l .

Прямая l_1 пересечёт плоскость α в некоторой точке A_1 . Полученную таким способом точку A_1 назовём проекцией точки A на плоскость α при проектировании параллельно прямой l (или кратко: точка A_1 – *параллельная проекция точки A*). Точку A также называют *оригиналом*, а точку A_1 – её *образом*.

Представление о параллельной проекции фигуры можно получить, рассматривая тень, которую отбрасывает на стену в солнечный день какой-нибудь объект, например, на рис. 2.4а – это тень от решётки ограды, а на рис. 2.4б – тень от узора переплетений рамы двери.

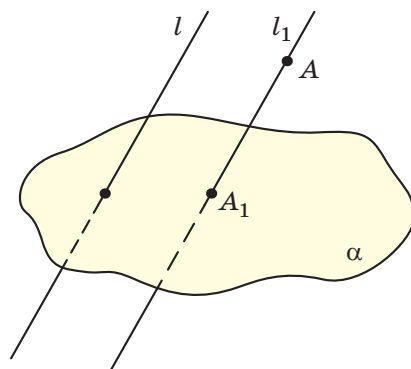
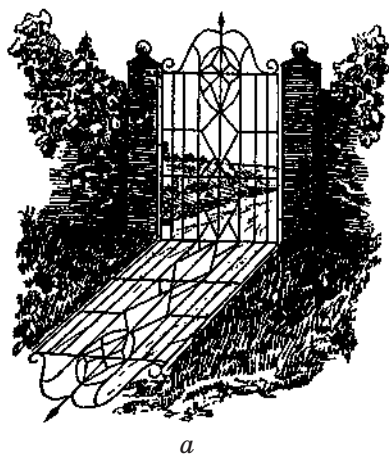
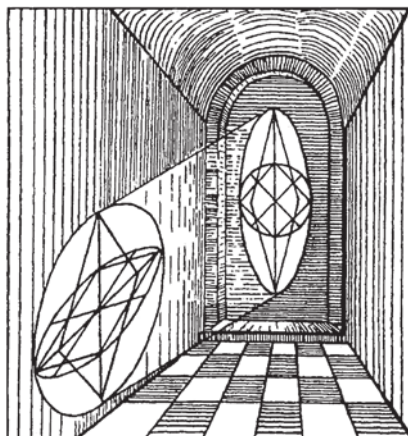


Рис. 2.3



а



б

Рис. 2.4

Изображение в параллельной проекции напоминает предмет, рассматриваемый издали: при неограниченном удалении глаза от оригинала лучи зрения становятся почти параллельными. Метод параллельных проекций используется при изготовлении иллюстративных чертежей в учебной и научной литературе.

2.2.2

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ФИГУР НА ПЛОСКОСТЬ

При построении параллельных проекций точки оригинала будем обозначать заглавными буквами $A, B, C, \dots$, а проекции этих точек на плоскость (образы) – буквами с индексами $A_1, B_1, C_1, \dots$ (рис. 2.5).

Рассмотрим параллельную проекцию отрезка на плоскость.

1. Пусть нам даны плоскость α , прямая проектирования l и отрезок AB (рис. 2.6а).

2. Если мы построим параллельные проекции концов отрезка AB на плоскость α , то получим точки A_1 и B_1 .

3. При этом мы получили параллельную проекцию отрезка AB – ею является отрезок A_1B_1 (рис. 2.6б).

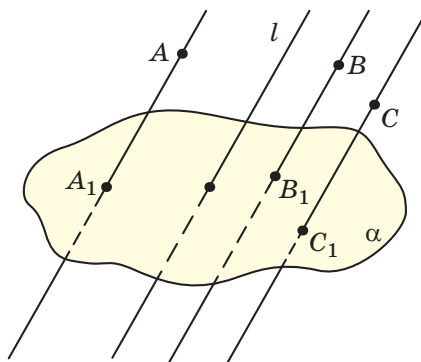


Рис. 2.5

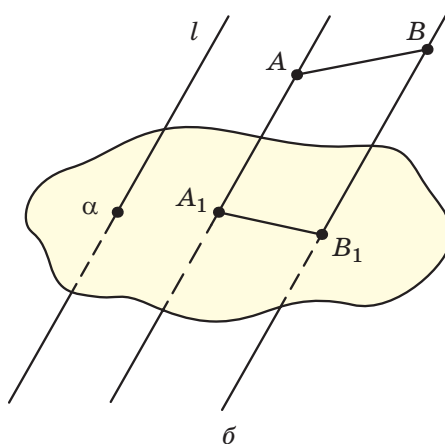
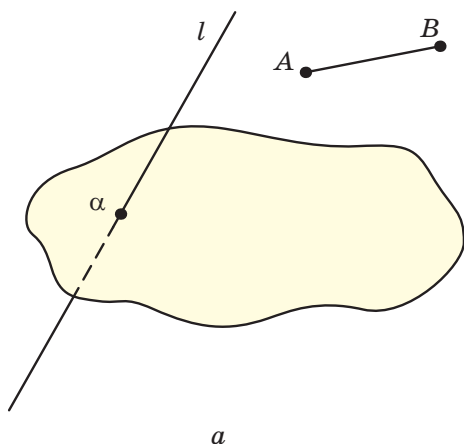


Рис. 2.6

Здесь могут возникнуть вопросы:



Всегда ли параллельной проекцией отрезка будет отрезок? Может ли при параллельной проекции получиться отрезок, равный данному по длине?

Обдумывая ответы на эти вопросы, важно помнить, как отмечалось в самом начале настоящего пункта, что направление проектирования (линия проектирования) должна пересекать плоскость проектирования.

Пример 1. На рис. 2.7 изображена параллельная проекция каркасной модели куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ на плоскость α , при этом направление проектирования задаётся лучом l .

Можно дать такое определение:

Определение 10. Параллельной проекцией фигуры Φ называется множество Φ_1 параллельных проекций всех точек данной фигуры.

Фигура Φ_1 называется также *образом фигуры Φ* при параллельном проектировании, а фигура Φ называется *оригиналом*.

Пример 2. На рис. 2.8а изображена параллельная проекция треугольной призмы на плоскость, а на рис. 2.8б правильный шестиугольник $ABCDEF$ отбрасывает на стену тень в виде многоугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Рассматривая эту тень (при различных положениях плоскости шестиугольника относительно плоскости стены), а также другие приведённые выше примеры, можно высказать несколько гипотез о свойствах параллельного проектирования.

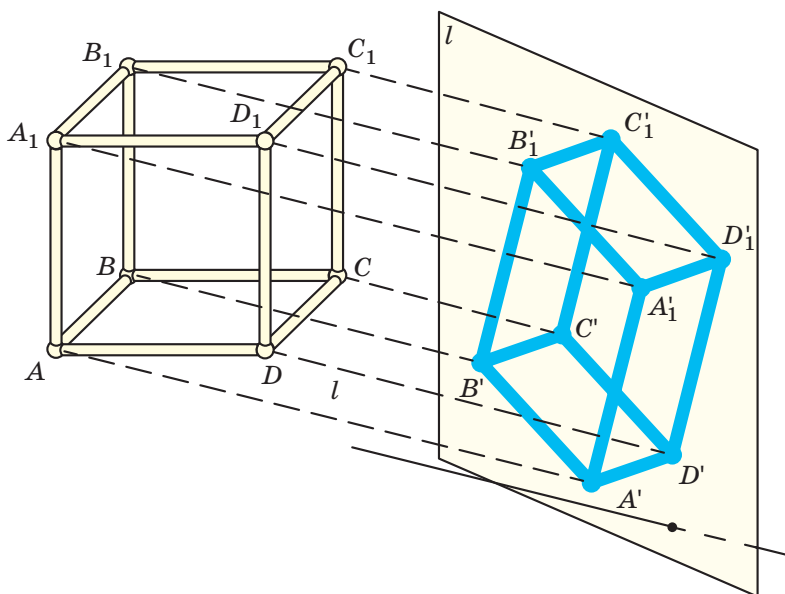


Рис. 2.7

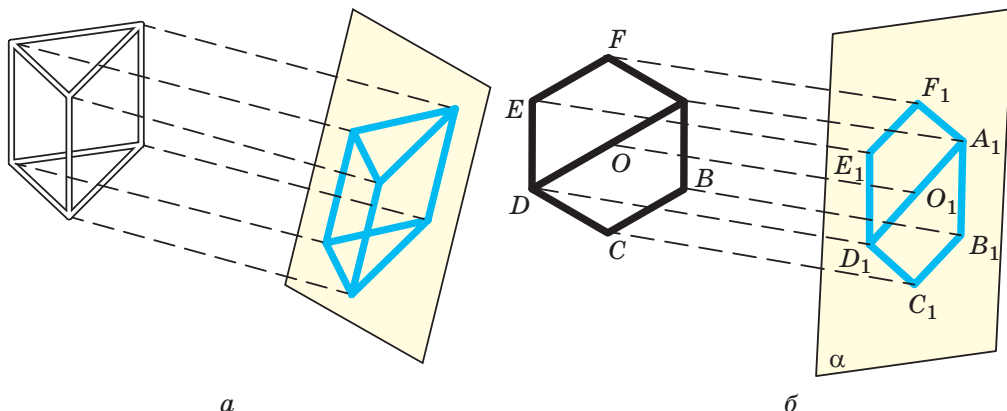


Рис. 2.8

При этом будем полагать, что проектирование производится параллельно прямой l , не параллельной проектируемым прямым или отрезкам.

2.2.3 СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Свойство 1. Проекция прямой есть прямая.

Свойство 2. Проекции параллельных прямых параллельны.

Свойство 3. Отношение длин проекций двух параллельных отрезков равно отношению длин проектируемых отрезков.

Все перечисленные свойства можно доказать, пользуясь аксиомами и теоремами геометрии. Доказывать эти свойства мы пока не будем, так как не имеем нужных для этого знаний.

Для любой данной фигуры форма её проекции зависит от положения оригинала относительно плоскости проекций, а также от выбора прямой l , параллельно которой выполняется проектирование.

Рассмотрим подробнее параллельные проекции некоторых фигур.

1. Треугольник. Наблюдая тень треугольника на плоскости (рис. 2.9), естественно предположить, что проекция данного треугольника может быть треугольником любой формы. Можно высказать такое предположение:



Проекцией данного треугольника может быть произвольный треугольник, лежащий в плоскости проекций (с точностью до подобия).

Точная формулировка этого утверждения такова: если A, B, C – произвольные три точки, не лежащие на одной прямой, и M, N, P – произвольные три точки, не лежащие на одной прямой, то при помощи параллельного проектирования можно перевести треугольник ABC в треугольник, подобный треугольнику MNP .

Доказать это утверждение мы пока не можем.

В частности, проекцией равностороннего треугольника может быть разносторонний треугольник с любыми величинами углов (естественно, дающими в сумме 180°). Это приводит нас к ещё одному непростому выводу:



При параллельном проектировании величины углов и отношения длин отрезков, вообще говоря, не сохраняются.

Отношение длин сохраняется только для отрезков, лежащих на одной и той же прямой или на параллельных прямых. В частности, проекция медианы треугольника является медианой проекции этого треугольника.

2. Параллелограмм. Так как параллельность прямых при параллельном проектировании сохраняется, то проекцией параллелограмма (в том числе прямоугольника, ромба, квадрата) служит параллелограмм (рис. 2.10). Длины сторон и величины углов этого параллелограмма (образа) можно выбрать произвольно (и в результате мы получим проекцию параллелограмма, подобного исходному).



Подумайте, как можно обосновать этот вывод.

Подсказка: Попробуйте применить правило проектирования треугольника (пункт 1) к треугольнику, полученному после проведения диагонали параллелограмма-оригинала.

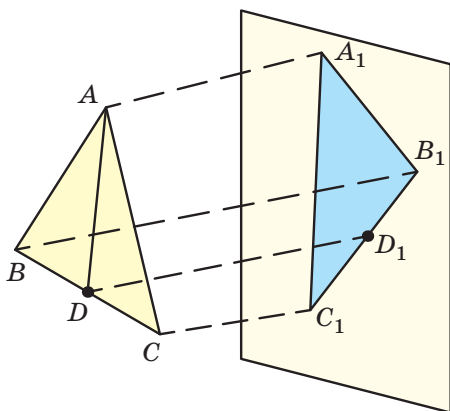


Рис. 2.9

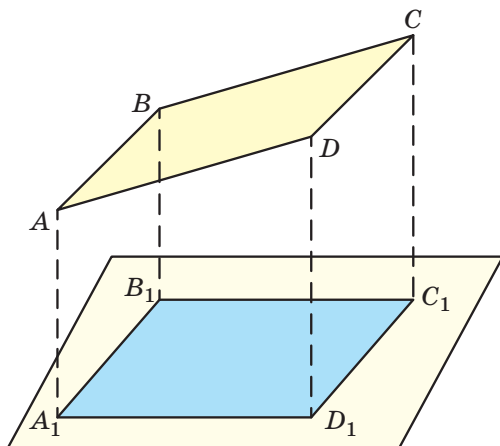


Рис. 2.10

3. Трапеция. Свойства параллельной проекции позволяют заключить, что проекцией трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD будет трапеция $A_1B_1C_1D_1$, у которой отношение оснований A_1B_1 и C_1D_1 равно отношению оснований оригинала, т.е. $A_1B_1 : C_1D_1 = AB : CD$.

4. Правильный шестиугольник. На рис. 2.86 изображена параллельная проекция правильного шестиугольника $ABCDEF$ на плоскость α .



Представьте себе, что нам нужно построить изображение на некоторой плоскости данного правильного шестиугольника, используя разобранные ранее примеры и свойства. Как это можно сделать?

5. Треугольная пирамида. Рассмотрим тень каркасной модели треугольной пирамиды (рис. 2.11). Можно предположить, что с точностью до подобия проекцией данной треугольной пирамиды может служить произвольный выпуклый или невыпуклый четырехугольник $ABCD$ с его диагоналями AC и BD (рис. 2.12).

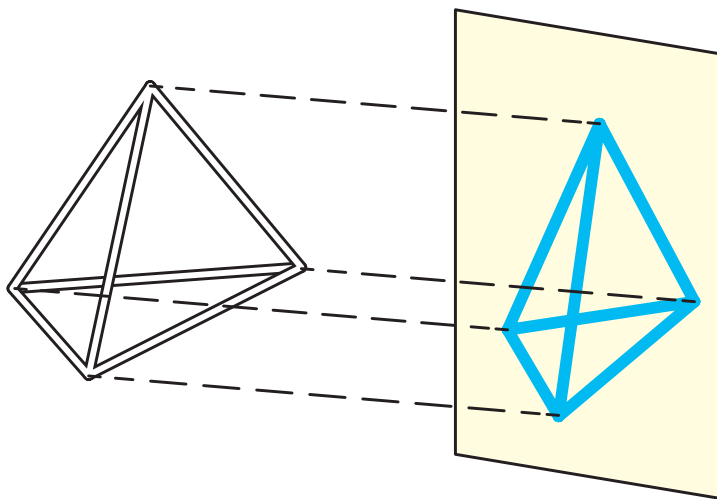


Рис. 2.11

Это предположение оказывается верным и известно под названием теорема Польке–Шварца. Её доказательство мы пока провести не можем.

6. Параллелепипед. Возьмём параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (оригинал). Выберём три его ребра AB , AD , AA_1 (рис. 2.13), выходящие из одной вершины.

Рассмотрим треугольную пирамиду $A_1 ABD$ (рис. 2.13). Пользуясь правилом проектирования треугольной пирамиды, приходим к выводу, что про-

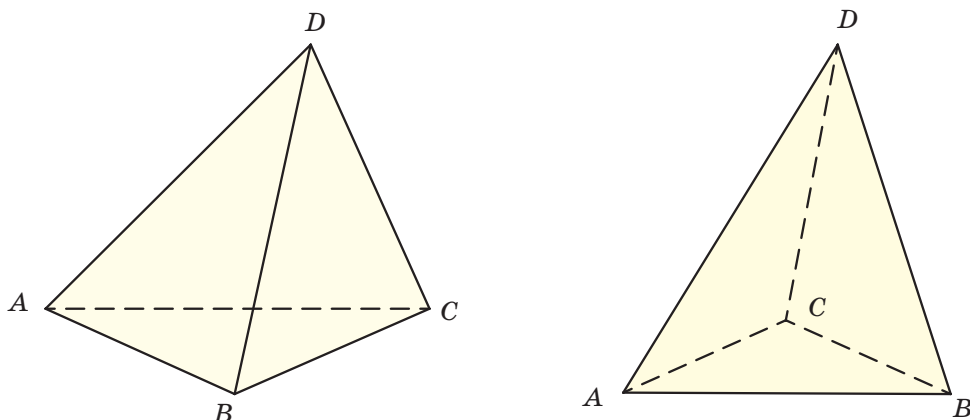


Рис. 2.12

екциями рёбер AB , AD , AA_1 могут с точностью до подобия быть три произвольных отрезка, выходящих из одной точки (рис. 2.14а).

На этом «произвол» при проектировании параллелепипеда заканчивается. Проекциями остальных его рёбер будут (согласно свойствам 1–3) вполне определённые отрезки (рис. 2.14б): каждый из них параллелен одному из построенных отрезков и равен ему по длине.

Верно выполненная параллельная проекция параллелепипеда (как, впрочем, и других фигур) может иногда выглядеть несколько необычно. Например, на рис. 2.15 показаны возможные проекции куба, которые можно получить при надлежащем выборе плоскости проекции и прямой проектирования. Ясно, что мы предпочтём привычное изображение куба (рис. 2.16).

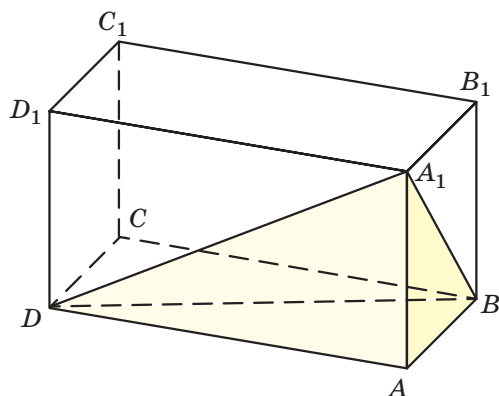


Рис. 2.13

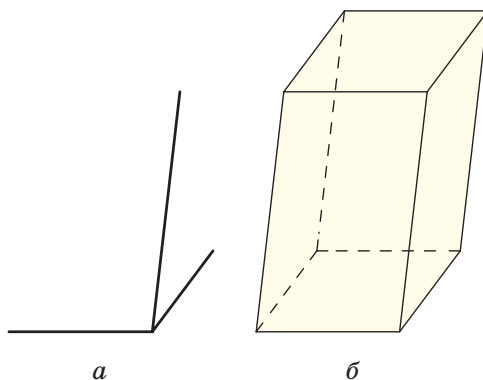


Рис. 2.14

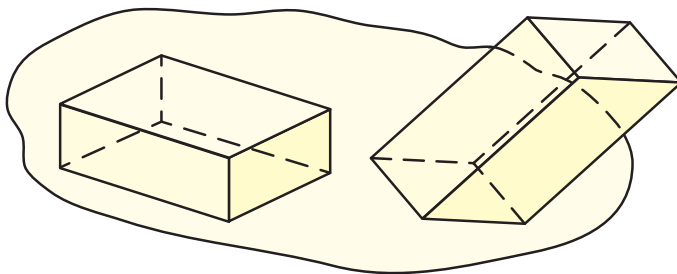


Рис. 2.15

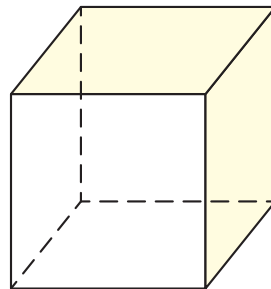


Рис. 2.16

§ 2.3*



МЕТОД ЦЕНТРАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ



Мы уже неоднократно говорили о том, что плоское изображение не может быть точной копией пространственной фигуры. Возникает проблема: по каким правилам строить изображение, чтобы оно было похоже на оригинал, то есть чтобы при рассматривании изображения возникало зрительное впечатление, близкое к тому, которое возникает при рассматривании оригинала? Для этой цели пользуются *проекционными методами*. В предыдущем параграфе вы уже познакомились с параллельным проектированием. Здесь мы рассмотрим *метод центральных проекций*. Эту проекцию иногда называют *перспективной*.

Пусть мы хотим изобразить на плоскости β кленовый лист, который лежит в плоскости α (рис. 2.17). Плоскость β при этом иногда называют картинной плоскостью или экраном, так как этим методом пользуются в фото-

графии и живописи. При этом на кленовый лист, расположенный на плоскости α , мы смотрим из некоторой точки O , называемой центром проекции (или центром перспективы).

Центральная проекция похожа на наше зрение: каждую видимую точку мы всегда видим на луче (называемом лучом зрения), проходящем от глаза (если его условно принять за точку) через эту видимую точку. Для получения чертежа на плоскости β надо найти точки, в которых с этой плоскостью пересекаются лучи зрения, идущие от глаза (точки O) к точкам предмета. Мы получим на плоскости β перспективу – проекцию интересующего нас предмета. Конечно, вместо кленового листа можно взять любой другой предмет или любую геометрическую фигуру.



Пусть нам задана фиксированная точка S (центр проекций) и фиксированная плоскость α (плоскость проекций), не проходящая через S . Через любую точку A пространства проводится прямая SA (проектирующая прямая). Точка A_1 пересечения этой прямой с плоскостью α называется проекцией точки A .

На рис. 2.18 показаны проекции двух точек – A и B .

Точки оригинала, лежащие на одной и той же проектирующей прямой, имеют один и тот же образ.

Метод центральных проекций даёт самые наглядные изображения, потому что описанное построение, как уже говорилось, воспроизводит процесс зрения: лучи, идущие из точки S через точки оригинала ($A, B, \dots$), совпадают с лучами, идущими из точки S через точки их проекций ($A_1, B_1, \dots$). Таким образом, если точку S условно считать глазом, то для него всё равно – рассматривать оригинал или его проекцию на плоскость α . (Правда, мы здесь несколько упрощаем: ведь оригинал рассматривается двумя глазами.)

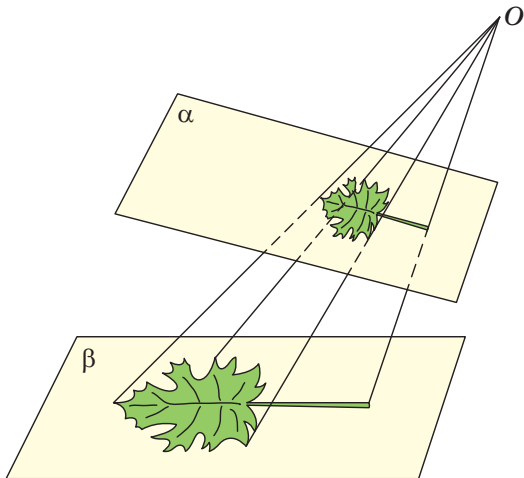


Рис. 2.17

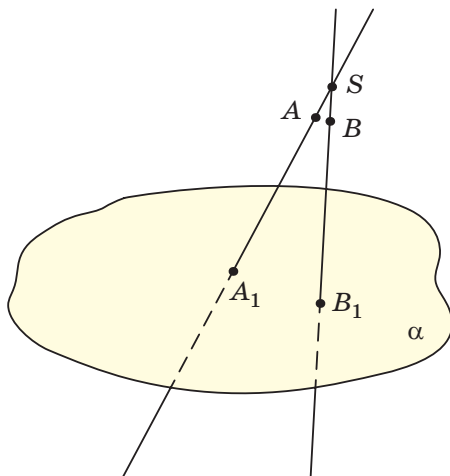


Рис. 2.18

Художники пользуются преимущественно методом центральных проекций. Для иллюстрации этого покажем, как на рисунках художник изображает ряд зданий (рис. 2.19).

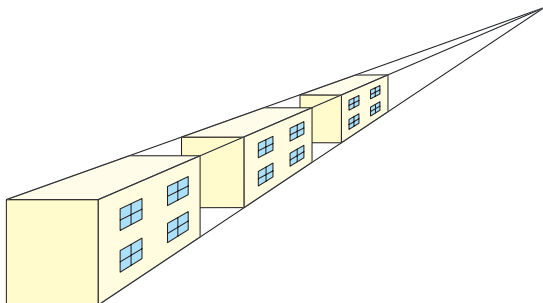


Рис. 2.19



Рис. 2.20

Эффект перспективы присутствует практически во всех полотнах живописцев. Суть этого эффекта заключается в том, что уходящие вдаль параллельные линии кажутся сходящимися. Этот эффект позволяет художникам на полотне создавать иллюзию пространственного изображения. На рис. 2.20 приведена фотография картины Гонзаго, которая показывает суть описанного эффекта перспективы.

§ 2.4



ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

2.4.1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

В геометрии традиционно вводится такое определение перпендикулярности прямой и плоскости:

Определение 11. Прямая называется *перпендикулярной* плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Запись « $a \perp \alpha$ » читается так: «прямая a перпендикулярна плоскости α ». Говорят также, что плоскость перпендикулярна прямой или что прямая и плоскость взаимно перпендикулярны.



Как понимать слова «прямая перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости α »?

На рис. 2.21 прямая l перпендикулярна плоскости α , значит, она перпендикулярна прямым a и b , которые лежат в плоскости α . Что значит перпендикулярность прямых l и a , имеющих общую точку, – понятно. Но как понимать перпендикулярность прямых l и b , у которых нет общей точки? И как проверить эту перпендикулярность?

2.4.2 УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

В § 1.6 мы говорили о скрещивающихся прямых: скрещивающиеся прямые не лежат в одной плоскости. Можно сказать по-другому: они не пересекаются и не параллельны. Прямые l и b на рис. 2.22 – скрещивающиеся.

Определение 12. Углом между двумя скрещивающимися прямыми называется угол между двумя пересекающимися прямыми, каждая из которых либо параллельна одной из данных скрещивающихся прямых, либо совпадает с ней.

Из этого определения следует, что угол α между скрещивающимися прямыми, как и угол между пересекающимися прямыми, удовлетворяет условию $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$.

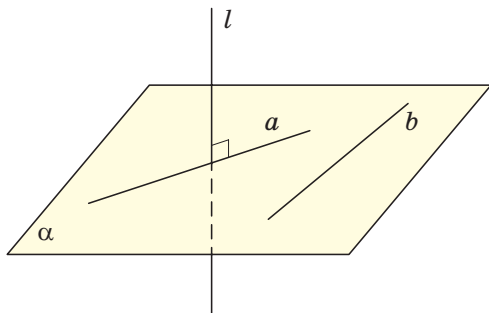


Рис. 2.21

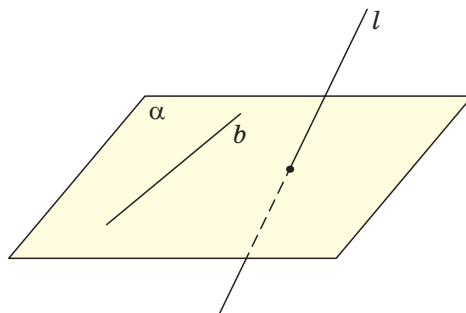


Рис. 2.22

Когда мы говорим «угол между скрещивающимися прямыми», то имеем в виду не геометрическую фигуру, а геометрическую величину, принимающую свои числовые значения в интервале от 0° до 90° .

Решим такую задачу.

ЗАДАЧА

Постройте угол, величина которого равна величине угла между данными скрещивающимися прямыми*.

Решение

1. Пусть нам даны две скрещивающиеся прямые a и b (рис. 2.23а).

2. Для построения угла между скрещивающимися прямыми a и b выберем в пространстве некоторую точку M и проведём через неё прямые $x \parallel a$ и $y \parallel b$ (построение) (рис. 2.23б).

3. Из четырёх углов, образовавшихся при пересечении прямых x и y , выберем угол, величина которого α удовлетворяет условию $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$. Это и будет угол между скрещивающимися прямыми a и b (рис. 2.23б) (1, 2, определение угла между скрещивающимися прямыми).

Замечание. Величина угла α между скрещивающимися прямыми не зависит от положения точки M в пространстве. Если выбрать другую точку M_1 и построить угол между скрещивающимися прямыми a и b с вершиной в точке M_1 , проведя через неё прямые $x_1 \parallel a$ и $y_1 \parallel b$, то угол между прямыми x_1 и y_1 окажется равным углу между прямыми x и y , т.к. $x_1 \parallel x$ и $y_1 \parallel y$. Этот факт позволяет при нахождении угла между скрещивающимися прямыми точку M брать наиболее удобно, например, на одной из скрещивающихся прямых.

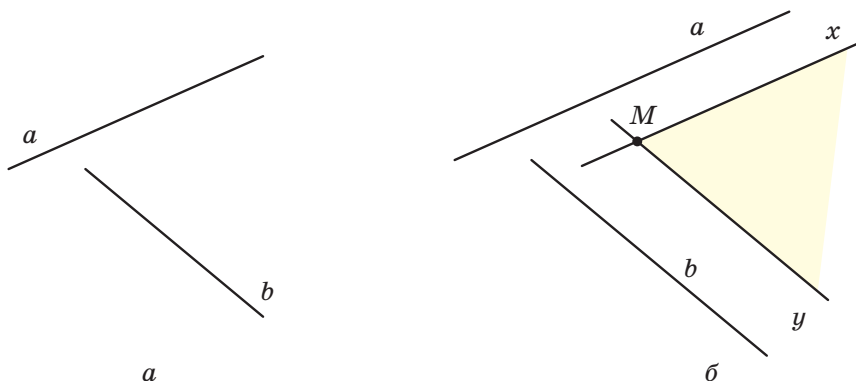


Рис. 2.23

* Несмотря на сказанное в абзаце, предшествующем формулировке задачи, допущая вольность речи, часто говорят: «Постройте угол между данными скрещивающимися прямыми». Мы тоже будем так иногда говорить.

Посмотрим, как на практике устанавливают мачты или высокие трубы. Их прикрепляют тросами к земле так, чтобы соответствующие углы были прямыми (рис. 2.24).

Обратимся ещё к одному примеру. На рис. 2.25 показано, как устанавливают на крестовине новогоднюю ёлку.

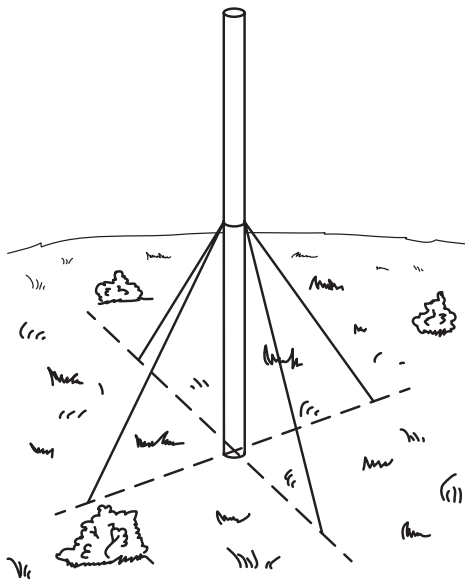


Рис. 2.24



Рис. 2.25

Эти практические наблюдения отражены в признаке перпендикулярности прямой и плоскости. Его иногда называют *теоремой о двух перпендикулярах*.

Теорема 8. Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости и проходящим через точку пересечения этой прямой и плоскости, то она перпендикулярна плоскости.

Доказательство этой теоремы довольно сложное.

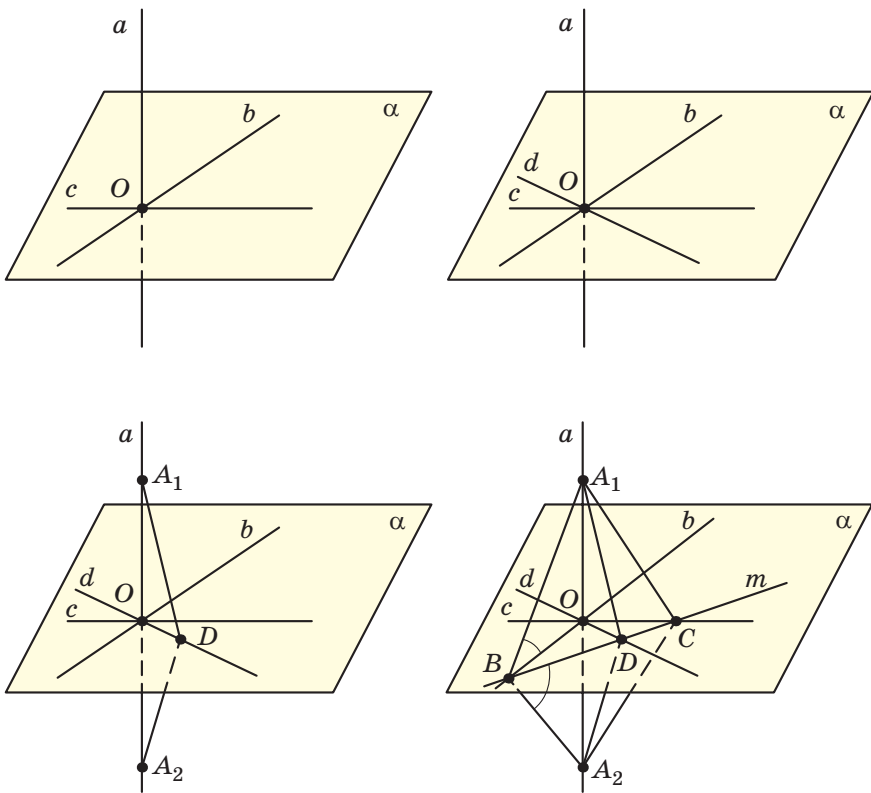


Рис. 2.26

Доказательство

1. Прямая a пересекает плоскость α .
 2. $a \perp b$, $b \subset \alpha$.
 3. $a \perp c$, $c \subset \alpha$.
 4. Прямые a и c пересекаются в точке O .
 5. $a \perp \alpha$ (требуется доказать).
- (дано) (рис. 2.26а)

Если вспомнить определение перпендикулярности прямой и плоскости, то п. 5 можно переформулировать так: если через точку O провести произвольно прямую d и доказать, что $a \perp d$, то п. 5 будет доказан.

6. Проведём прямую d , проходящую через точку O (построение) (рис. 2.26б).

7. $a \perp d$ (требуется доказать).

Как можно доказать перпендикулярность прямых a и d ?

Один из ответов может быть таким: нужны два треугольника – A_1DO и A_2DO , стороны которых принадлежат этим прямым, а углы A_1OD и A_2OD являются смежными и равными (рис. 2.26в). Как получить эти треугольники,

а точнее, как построить точки A_1 , A_2 и D так, чтобы в дальнейшем доказать равенство треугольников A_1DO и A_2DO ? Возможны ли такие построения?

8. Отложим $OA_1 = OA_2$ (построение) (рис. 2.26в).

9. Проведём через точку D прямую m , пересекающую прямые b и c в точках B и C (построение) (рис. 2.26в).

10. Соединим точки A_1 и A_2 с точками B , C и D (построение) (рис. 2.26г).

Мы получили на рис. 2.26г много треугольников. Вспомним, что надо доказать равенство треугольников A_1OD и A_2OD . Как это сделать? В этих треугольниках A_1OD и A_2OD сторона OD – общая, значит, нужно доказать, что $A_1D = A_2D$.

11. $A_1O = A_2O$ (8).

12. OD – общая сторона $\triangle A_1OD$ и $\triangle A_2OD$ (8, 11).

13. $A_1D = A_2D$ (требуется доказать).

Для доказательства п. 11 следует рассмотреть несколько пар равных треугольников.

14. $\triangle A_1OB = \triangle A_2OB$.

15. $\triangle A_1OC = \triangle A_2OC$.

16. $A_1B = A_2B$, $A_1C = A_2C$ (14, 15).

17. $\triangle A_1BC = \triangle A_2BC$ (14, признак равенства треугольников по трём сторонам).

18. $\triangle A_1BC = \triangle A_2BC$, $\triangle A_1CB = \triangle A_2CB$ (17).

19. $\triangle A_1BD = \triangle A_2BD$ (14, 16, признак равенства треугольников по трём сторонам).

20. $A_1D = A_2D$ (19).

21. $\triangle A_1BD = \triangle A_2BD$ (8, 20, признак равенства треугольников по трём сторонам).

22. $\triangle A_1OD = \triangle A_2OD$ (21).

23. $\triangle A_1OD = \triangle A_2OD = 90^\circ$ (21, 22).

24. (7) $a \perp d$ (23).

25. (5) $a \perp \alpha$ (7, определение перпендикуляра и плоскости). ■

На рис. 2.27а прямая a , пересекающая плоскость α в точке A , перпендикулярна пересекающимся прямым b и c , лежащим в плоскости α и пересекающимся в точке O . В этом случае также можно говорить, что прямая a будет перпендикулярна плоскости α .

Теорема о двух перпендикулярах в этом случае (она называется обобщённым признаком перпендикулярности прямой и плоскости) может быть сформулирована следующим образом:

Теорема 9. Если прямая a перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости α , то она перпендикулярна плоскости α .

Доказательство

Ясно, что при доказательстве нам может помочь понятие угла между скрещивающимися прямыми. Действительно, проведём в плоскости α через

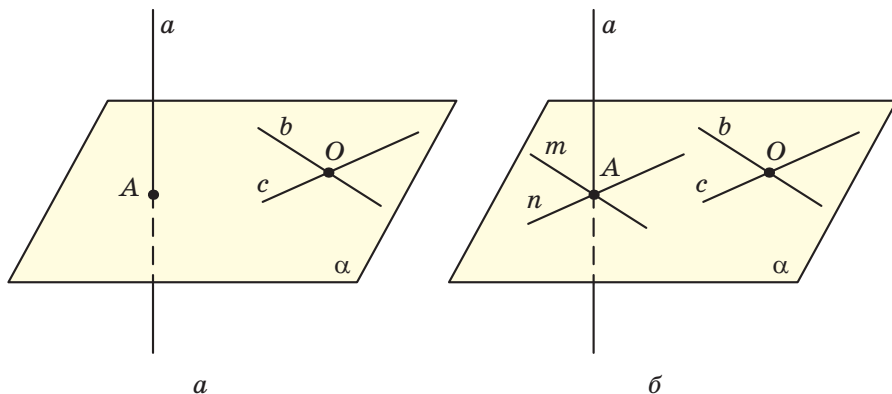


Рис. 2.27

точку A прямую m , параллельную прямой b , и прямую n , параллельную прямой c (рис. 2.27б). Т.к. $a \perp m$ и $a \perp n$, то мы оказываемся в условиях теоремы 8 и можем заключить, что прямая a перпендикулярна плоскости α . ■

2.4.4

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИЗНАКА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Мы хорошо знаем, как провести на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые. Возникает вопрос:



Можно ли в этой же плоскости провести прямую, которая будет перпендикулярна первым двум?

Докажите самостоятельно, что такую прямую провести нельзя.



А можно ли в пространстве через каждую точку провести три взаимно перпендикулярные прямые?

Подумайте, как можно выполнить это построение.

Предположим, что мы провели через точку O три взаимно перпендикулярные прямые a , b , c (рис. 2.28а). Нетрудно догадаться, что если через прямые b и c провести плоскость α , то прямая a будет перпендикулярна плоскости α (рис. 2.28б). Обобщите самостоятельно этот вывод.

Аналогично мы можем провести плоскости через прямые a и c и прямые a и b . В результате получим три пересекающиеся плоскости (рис. 2.29).

Ранее мы научились строить перпендикулярные прямые. Сейчас мы разобрались с понятием перпендикулярности прямой и плоскости и хотим научиться строить плоскость, проходящую через данную точку перпендикулярно данной прямой. Решим такую задачу.

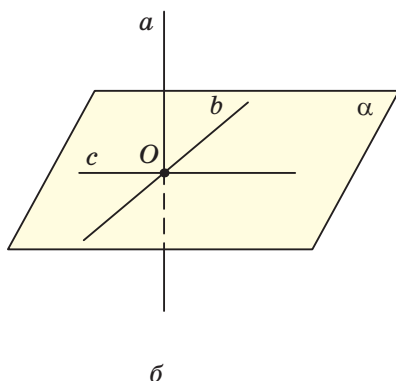
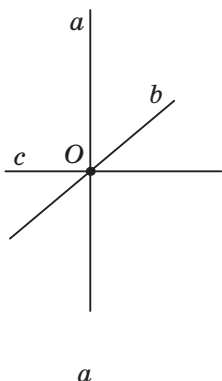


Рис. 2.28

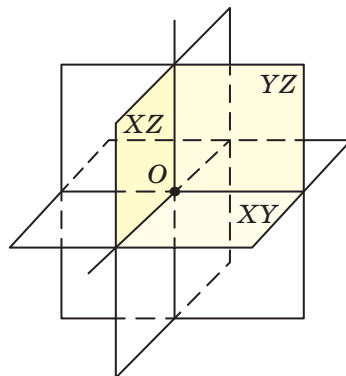


Рис. 2.29

ЗАДАЧА

Через данную точку провести (построить) плоскость, перпендикулярную данной прямой.

Замечание. Особенность построения фигур в пространстве в том, что мы не столько *выполняем* само построение, как *доказываем*, что такое построение возможно, опираясь на имеющиеся у нас знания.

При этом предполагается возможность выполнения построений, о которых идёт речь в аксиомах:

- 1) Через любые две точки в пространстве провести прямую.
- 2) Через любые три точки провести плоскость*.
- 3) Построить прямую пересечения двух уже построенных плоскостей.

Кроме этого предполагается, что можно взять произвольную точку в пространстве или на уже построенной геометрической фигуре, а также что все планиметрические построения выполнимы в пространстве на любой уже построенной плоскости.

Решение

При решении этой задачи следует рассмотреть два случая. Точка, через которую нам нужно провести плоскость, перпендикулярную данной прямой: 1) лежит вне данной прямой; 2) лежит на данной прямой.

Случай 2 мы рассмотрим позже, в параграфе 3.1. Сейчас разберём случай 1.

Пусть A – точка, взятая вне данной прямой a (рис. 2.30а).

Анализ. Предположим, что мы построили плоскость α , проходящую через точку A и перпендикулярную прямой a (рис. 2.30б). Прямая a пересекает плоскость α в точке O , $A \in \alpha$.

* Отсюда следует возможность построения плоскости, проходящей через: а) прямую и не лежащую на ней точку; б) две пересекающиеся прямые; в) две параллельные прямые.

Нетрудно увидеть, что если у нас будет ситуация, изображённая на рис. 2.30в ($m \subset \alpha$, $n \subset \alpha$, $a \perp m$, $a \perp n$, $A \in m$), то мы получим нужную нам плоскость α (объясните этот вывод).

Построение.

1. Из точки A проводим к прямой a прямую m , перпендикулярную a ; обозначим точку её пересечения с прямой a через O (рис. 2.30в);

2. Через точку O проводим прямую n , перпендикулярную a ;

3. Через прямые m и n проводим плоскость α . Данная плоскость α – искомая (рис. 2.30в).

Позже, в параграфе 3.1 на с. 87 мы вернёмся к решению этой задачи.

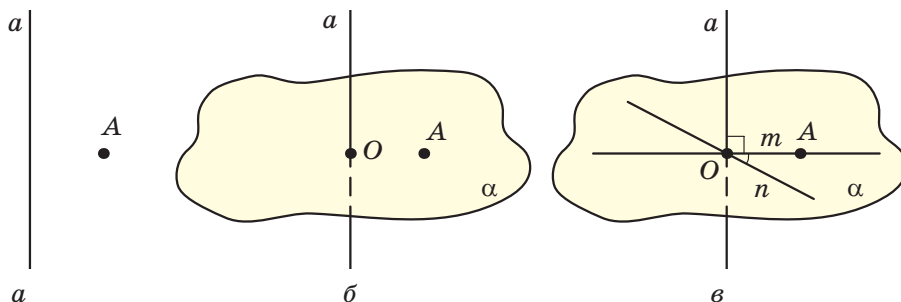


Рис. 2.30

2.4.5 ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

С понятием перпендикулярности прямой и плоскости связан важный вид проекций – *ортогональная проекция*.

Пусть нам даны плоскость α и точка A вне её (рис. 2.31). Если провести через точку A прямую, перпендикулярную плоскости α , мы получим точку A_1 , принадлежащую плоскости α , которая будет *ортогональной проекцией точки A на плоскость α* (рис. 2.32).

Определение 13. Ортогональной проекцией точки A на плоскость α называется точка A_1 пересечения с этой плоскостью прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной плоскости α .

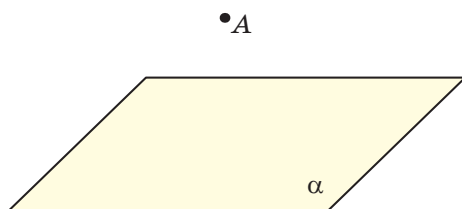


Рис. 2.31

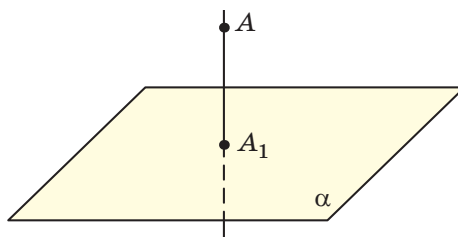


Рис. 2.32

Если $A \in \alpha$, то A совпадает со своей проекцией. В дальнейшем мы будем вместо словосочетания «ортогональная проекция» говорить просто «проекция». Если нам встретятся другие проекции, то это будет оговорено особо.

Нам часто придется рассматривать проекции отрезка или прямой на данную плоскость. На рис. 2.33а изображена проекция отрезка AB на плоскость α , на рис. 2.33б – проекция прямой MN на плоскость α . Проекциями этих фигур являются соответственно отрезок A_1B_1 и прямая M_1N_1 .

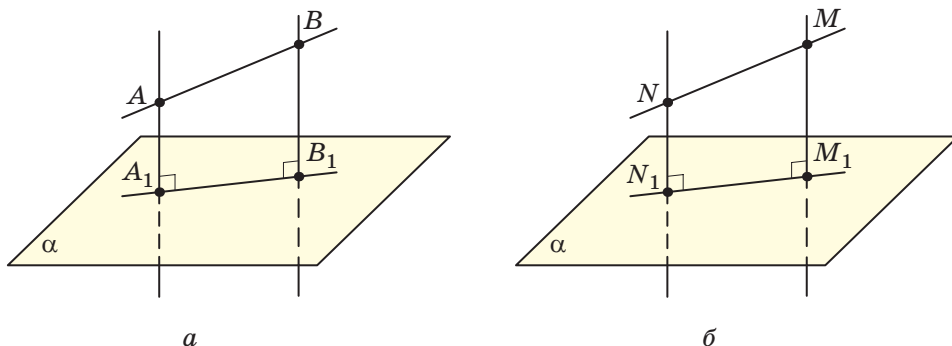


Рис. 2.33

Определение 14. Проекцией фигуры на плоскость называется множество проекций её точек на эту плоскость.

На рис. 2.34 изображена проекция фигуры F на плоскость α .

На рис. 2.35 изображена проекция нескольких фигур на вертикальную плоскость. Из этого рисунка видно, что по проекции фигуры на данную плоскость восстановить оригинал невозможно.

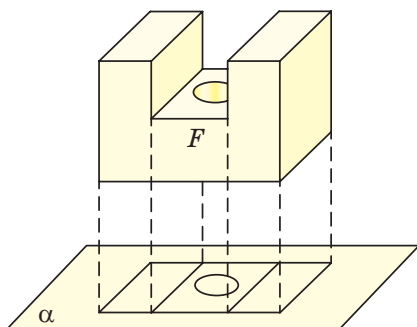


Рис. 2.34

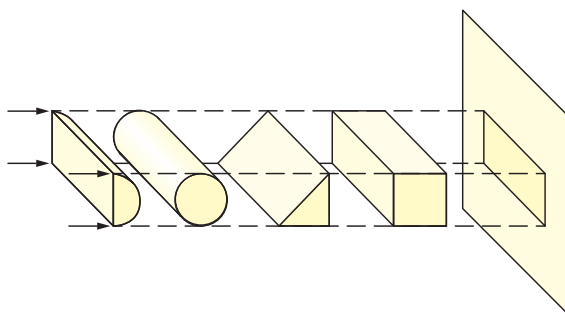


Рис. 2.35

В этом разделе мы изучим вопрос о взаимосвязи параллельности и перпендикулярности прямых, проведённых к данной плоскости. На рис. 2.36 изображена плоскость α и проведены различные прямые, её пересекающие: c пересекает α и наклонена к ней, $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha$, $a \parallel b$.

Мы уже показали, что в плоскости две прямые, перпендикулярные одной прямой, параллельны. Ответим на такие вопросы:



Верно ли, что плоскость, перпендикулярная к одной из двух параллельных прямых, перпендикулярна и к другой?



Верно ли, что две различные прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны между собой?

В окружающей нас природе это всегда так. На рис. 2.37а стволы деревьев перпендикулярны плоскости (поверхности земли), параллельны между собой, а на рис. 2.37б то же самое можно сказать о мачтах корабля, перпендикулярных плоскости палубы (разумеется, в этом примере мы условно принимаем деревья и мачты за отрезки, пренебрегая их толщиной).

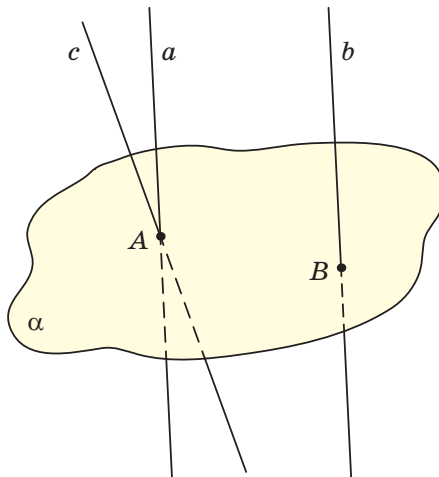
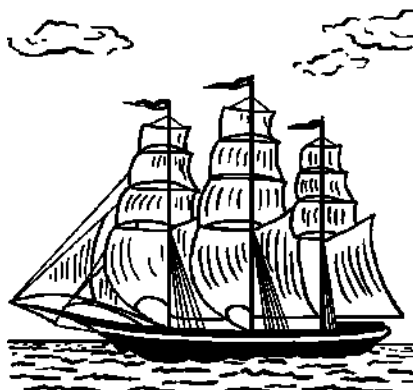


Рис. 2.36



а



б

Рис. 2.37

Этим свойствам мы пользовались раньше при провешивании прямых, а также при построении прямого угла на поверхности земли. Докажем это важное свойство.

Теорема 10. Если плоскость перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.

Доказательство

1. $AB \parallel CD$.
2. $AB \perp \alpha$.
3. $CD \perp \alpha$ (требуется доказать).

Признак перпендикулярности прямой и плоскости подсказывает нам такое дополнительное построение.

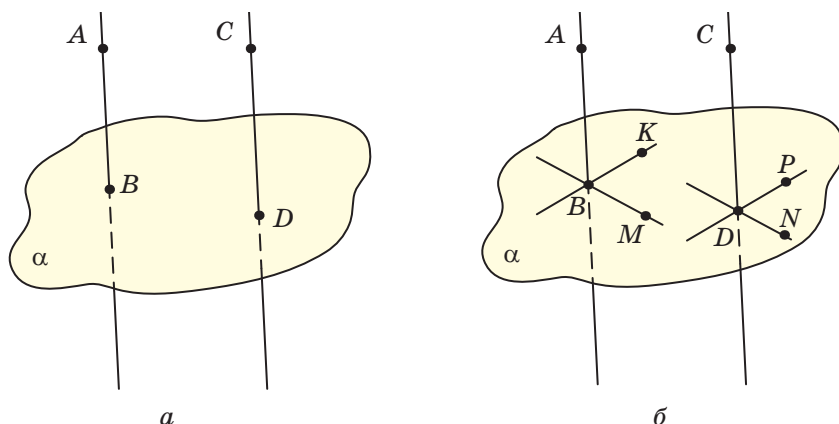


Рис. 2.38

4. Через точку B в плоскости α проведём прямые KB и MB (построение) (рис. 2.38б).

5. Через точку D в плоскости α проведём $PD \parallel KB$, $ND \parallel MB$ (построение) (рис. 2.38б).

После выполненных построений мы можем сделать следующие выводы:

6. $AB \perp KB$; $AB \perp MB$ (2, 4).

7. $\angle KBA = \angle PDC$ и $\angle MBA = \angle NDC$ (3, свойство углов с соответственно параллельными сторонами).

8. $\angle KBA = \angle PDC$ и $\angle MBA = \angle NDC = 90^\circ$ (6, 7).

9. $CD \perp PD$, $CD \perp ND$ (8).

10 (3). $CD \perp \alpha$ (9). ■

Справедлива ли обратная теорема? Оказывается, да.

Теорема 11. Если две различные прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.

Доказательство

1. $AB \perp \alpha$.
2. $CD \perp \alpha$.
3. $AB \parallel CD$ (требуется доказать).

Мы хотим доказать, что $AB \parallel CD$. Попробуем воспользоваться методом доказательства от противного.

4. Предположим противное, то есть что прямые AB и CD не являются параллельными (предположение).

5. Проведём через точку D прямую C_1D , параллельную AB , $C_1D \parallel AB$ (построение) (рис. 2.39б).

6. $C_1D \perp \alpha$ (5, Т.10).

7. Через прямые CD и C_1D проведём плоскость β (5, Т.3) (рис. 2.39в).

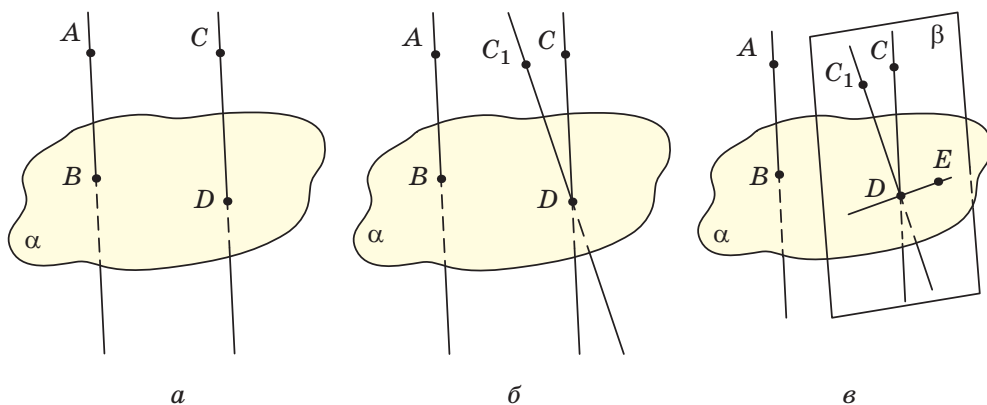


Рис. 2.39

8. Плоскости α и β пересекаются по прямой DE (рис. 2.39в) (7, 5).
9. $CD \perp DE$ (2, определение перпендикулярности прямой и плоскости).
10. $C_1D \perp DE$ (6, определение перпендикулярности прямой и плоскости).

11. Через точку D прямой DE в плоскости β проведены к прямой DE две перпендикулярные прямые CD и C_1D (9, 10).

12 (3). Пункт 11 противоречит теореме о том, что в плоскости через любую точку можно провести только одну прямую, перпендикулярную данной (эта теорема известна вам из учебника геометрии для 7–9-го классов). Значит, предположение пункта 4 неверно и $AB \parallel CD$. ■



ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ К ПЛОСКОСТИ

2.5.1 ПЕРПЕНДИКУЛЯРЫ, НАКЛОННЫЕ И ИХ СВОЙСТВА

Пока мы говорили только о прямых, пересекающих плоскость, в том числе о прямых, перпендикулярных к плоскости. Часто нас будут интересовать только отрезки таких прямых от данной точки, лежащей вне плоскости, до точек их пересечения с плоскостью. У таких отрезков есть особые названия. Дадим определение перпендикуляра к плоскости:

Определение 15. *Перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости.*

Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием перпендикуляра*. На рис. 2.40 точка O является основанием перпендикуляра, а отрезок OA является перпендикуляром к плоскости α . Часто вместо «перпендикуляр, опущенный из точки на плоскость» говорят «перпендикуляр, проведённый из точки к плоскости».

Определение 16. *Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.*

Дадим теперь определение наклонной, проведённой из данной точки к данной плоскости:

Определение 17. *Наклонной, проведённой из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и не являющийся перпендикуляром к этой плоскости.*

Конец наклонной, лежащей в плоскости, называется *основанием наклонной*. На рис. 2.41 изображены перпендикуляр OA и наклонная OB , проведённые из точки O к плоскости α .

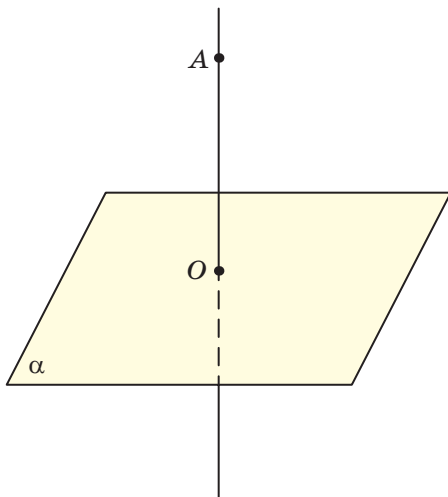


Рис. 2.40

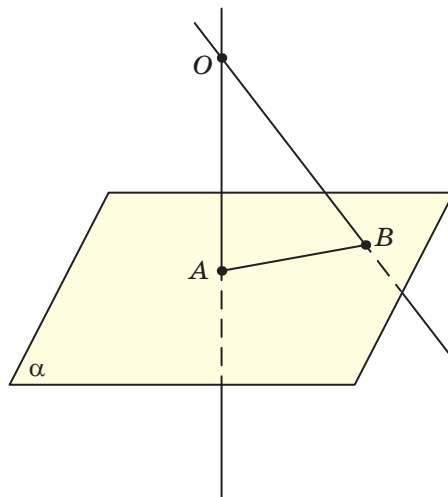


Рис. 2.41

Определение 18. Отрезок, соединяющий основание перпендикуляра и основание наклонной, проведённых из одной и той же точки к данной плоскости, называется *проекцией наклонной на плоскость*.

На рис. 2.41 из точки O проведены к плоскости α перпендикуляр OA и наклонная OB . AB – проекция наклонной OB на плоскость α .

Если вспомнить материал раздела «Ортогональное проектирование», то становится понятным: то, что названо в определении 15 проекцией наклонной на плоскость, является её ортогональной проекцией. Мы уже договорились выше, что если говорим «проекция», то имеем в виду ортогональную проекцию.

В учебнике геометрии для 7–9-го классов мы тоже изучали свойства перпендикуляров и наклонных, но тогда шла речь о перпендикулярах и наклонных, проведённых к данной прямой. Напомним, что мы из точки, лежащей вне прямой, проводили к этой прямой перпендикуляр и наклонные, а значит, мы выполняли построение в некоторой плоскости (по теореме 2 прямая и точка задают единственную плоскость). Сейчас мы имеем плоскость и точку вне неё и проводим из этой точки перпендикуляр и наклонные к плоскости.

Докажем несколько теорем о свойствах перпендикуляра и наклонных, проведённых к данной плоскости из одной точки.

Теорема 12. Перпендикуляр короче всякой наклонной, проведённой из той же точки. Всякая наклонная длиннее своей проекции.

Докажите эту теорему самостоятельно, рассматривая прямоугольный $\triangle AOB$ на рис. 2.41.

Теорема 13. Если из точки S , лежащей вне плоскости α , проведены отрезки $SA, SB, SC, \dots$ во все точки плоскости α и SH – кратчайший из них, то SH – перпендикуляр к плоскости.

Доказательство

- | | | |
|--|---|--------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Из точки S к плоскости α проведены всевозможные отрезки $SH, SA, SA_1, SA_2 \dots$. 2. Отрезок SH имеет наименьшую длину. 3. $SH \perp \alpha$ (требуется доказать). | } | (дано) (рис. 2.42) |
|--|---|--------------------|

Попробуем воспользоваться методом доказательства от противного.

4. Предположим, что SH не перпендикулярен к плоскости α (предположение).

5. Проведём SH_1 – перпендикуляр к плоскости α (построение).

6. $SH_1 < SH$ (3, T12).

Пункт 6 противоречит условию теоремы (п. 2), значит, наше предположение 4 неверно и SH – перпендикуляр к плоскости α . ■

Теорема 14. Если из одной точки к плоскости проведено несколько наклонных, то чем длиннее проекция наклонной, тем длиннее наклонная; если равны проекции наклонных, то равны и наклонные.

Доказательство этой теоремы легко провести, если рассмотреть прямоугольные треугольники SHB и SHA_1 ; SHA_1 и SHA_2 (рис. 2.43). Сделайте это самостоятельно.

Аналогично можно доказать ещё одну теорему.

Теорема 15. Если из одной точки к плоскости проведено несколько наклонных, то чем длиннее наклонная, тем длиннее проекция; если наклонные равны, то и проекции равны.

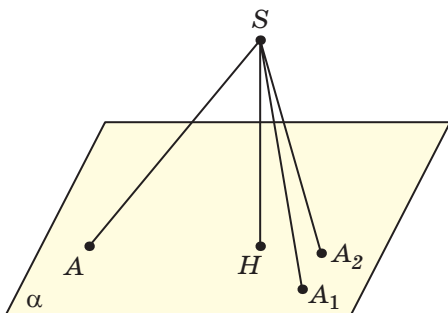


Рис. 2.42

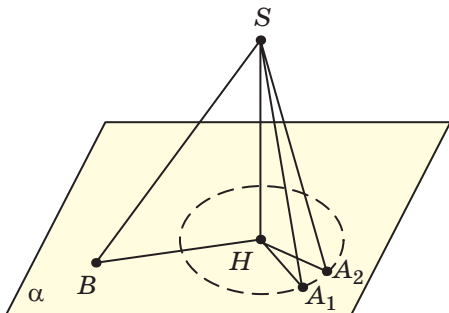


Рис. 2.43

2.5.2 ТЕОРЕМА О ТРЁХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

Приступим к рассмотрению одной из самых важных теорем геометрии пространства – *теоремы о трёх перпендикулярах*. Сначала докажем такую теорему:

Теорема 16. Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна и самой наклонной.

Заметим, что в этой теореме под словами «перпендикуляр», «наклонная», «проекция» можно понимать не только соответствующие отрезки, но и прямые, на которых они лежат, – теорема будет справедлива при любом понимании этих слов.

Доказательство.

Из условия теоремы мы имеем:

- | | | |
|---|---|--------------------|
| <ol style="list-style-type: none">1. $h \perp \alpha$.2. a – наклонная.3. a' – проекция наклонной.4. $l \perp a'$.5. $l \perp a$ (требуется доказать). | } | (дано) (рис. 2.44) |
|---|---|--------------------|

Мы хотим доказать, что две прямые l и a перпендикулярны. Как это можно сделать? Путей может быть несколько:

а) убедиться, что угол между прямыми l и a равен 90° ;

б) доказать, что прямая l перпендикулярна плоскости, в которой лежит прямая a .

Попробуем реализовать путь б). Есть ли у нас на рис. 2.27 плоскости (или плоскость), в которых лежит прямая a ? Да, есть. Это плоскость, образованная прямыми h и a , обозначим её β . Докажем, что l перпендикулярна этой плоскости, то есть $l \perp \beta$.

6. $h \perp l$ или $l \perp h$ (1, определение прямой, перпендикулярной плоскости).
7. $l \perp h$, $l \perp a'$, а значит, $l \perp \beta$ (4, 6, Т9).
8. $l \perp a'$ (7, определение перпендикуляра к плоскости). ■

Можно доказать и обратную теорему.

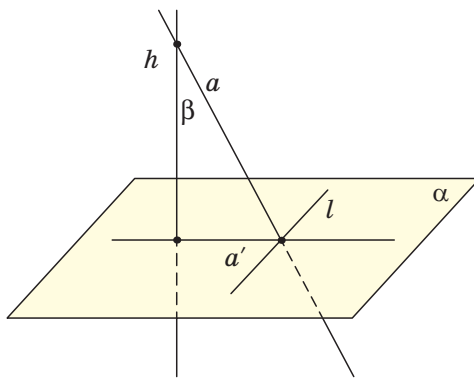


Рис. 2.44

Теорема 17. Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и её проекции.

Доказательство попробуйте провести самостоятельно.

Удобно сформулировать теоремы 16 и 17 в следующем объединённом виде:

Теорема 18 (теорема о трёх перпендикулярах). Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной к этой плоскости тогда и только тогда, когда она перпендикулярна её проекции.

Рассмотрим применение теоремы о трёх перпендикулярах.

Проведём в кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ диагональ B_1D (рис. 2.45а). В каждой из шести граней куба рассмотрим две диагонали этой грани. Одна из этих диагоналей пересекается с диагональю B_1D куба, а другая – скрещивается. Например, в грани CDD_1C_1 диагональ C_1D этой грани пересекается с диагональю B_1D куба в точке D , а диагональ CD_1 грани CDD_1C_1 скрещивается с диагональю B_1D куба (рис.2.45а). Аналогично в грани $ABCD$ диагональ BD этой грани пересекается с диагональю B_1D куба в точке D , а диагональ AC скрещивается с ней (рис.2.45б).

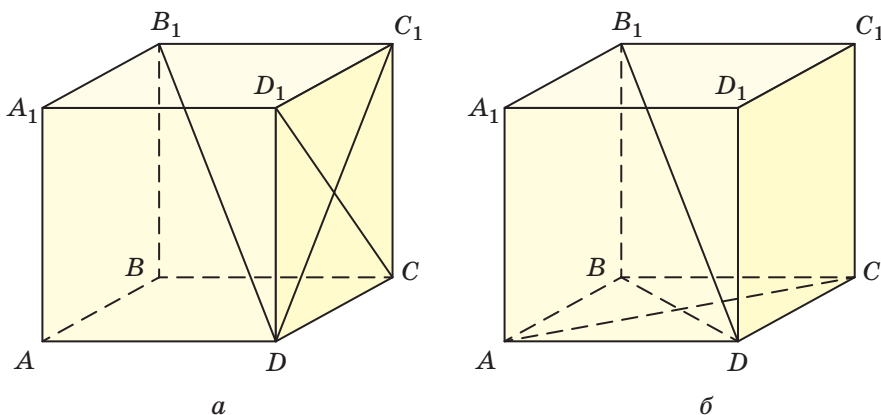


Рис. 2.45

Решим такую задачу.

ЗАДАЧА

Докажите, что диагональ куба перпендикулярна любой скрещивающейся с ней диагонали грани.

Решение

1. Докажем, например, что диагональ B_1D куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярна скрещивающейся с ней диагонали AC грани $ABCD$ (рис. 2.45б).

2. Прежде всего, понятно, что $BB_1 \perp AB$ и $BB_1 \perp BC$ (смежные стороны квадратов ABB_1A_1 и BCC_1B_1 соответственно).

3. Отсюда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости следует, что отрезок BB_1 перпендикулярен плоскости $ABCD$, т.е. является перпендикуляром, проведённым из точки B_1 к этой плоскости.

4. Заметим также, что B_1D – наклонная, проведённая из той же точки B_1 к плоскости $ABCD$, а BD – проекция этой наклонной.

5. Но AC – прямая в плоскости $ABCD$, перпендикулярная этой проекции ($AC \perp BD$ как диагонали квадрата $ABCD$).

6. Следовательно, по теореме о трёх перпендикулярах $AC \perp B_1D$. ■

Из решения рассмотренной задачи можно легко получить несколько полезных следствий.

Следствие 1

1. Проведём в кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ диагональ B_1D (рис. 2.46а) и рассмотрим плоскость ACD_1 .

2. По доказанному выше $B_1D \perp AC$ и $B_1D \perp D_1C$, а значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости диагональ B_1D перпендикулярна плоскости ACD_1 .

3. Аналогично устанавливается, что диагональ B_1D перпендикулярна плоскости A_1C_1B (рис. 2.46б).

Следствие 2

1. Треугольник ACD_1 – правильный, поскольку его стороны – диагонали равных квадратов.

2. Диагональ B_1D куба перпендикулярна плоскости этого треугольника.

3. Пусть E – точка пересечения отрезка B_1D с плоскостью ACD_1 (рис. 2.46а).

4. Тогда DE – перпендикуляр, проведённый из точки D к плоскости ACD_1 , а DA , DC и DD_1 – наклонные, проведённые из этой же точки к этой же плоскости.

5. Поскольку эти наклонные равны (как рёбра куба), то равны и их проекции EA , EC и ED_1 .

6. Таким образом, диагональ B_1D куба пересекает плоскость треугольника ACD_1 в центре этого треугольника (рис. 2.46а).

Следствие 3

1. Найдём длину отрезка DE . Если ребро куба равно a , то сторона правильного треугольника ACD_1 равна $a\sqrt{2}$, а отрезок EA (радиус описанной около

него окружности) равен $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Теперь из прямоугольного треугольника

ADE по теореме Пифагора имеем $DE^2 = AE^2 - AD^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{3a^2}{9}$, т.е.

$$DE = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

2. Поскольку длина диагонали куба с ребром a равна $a\sqrt{3}$, то отрезок DE составляет треть диагонали B_1D .

3. Аналогично на рис. 2.46б точка F – центр правильного треугольника A_1C_1B и отрезок B_1F составляет треть диагонали B_1D .

4. Таким образом, плоскости ACD_1 и A_1C_1B делят диагональ B_1D куба на три равные части.

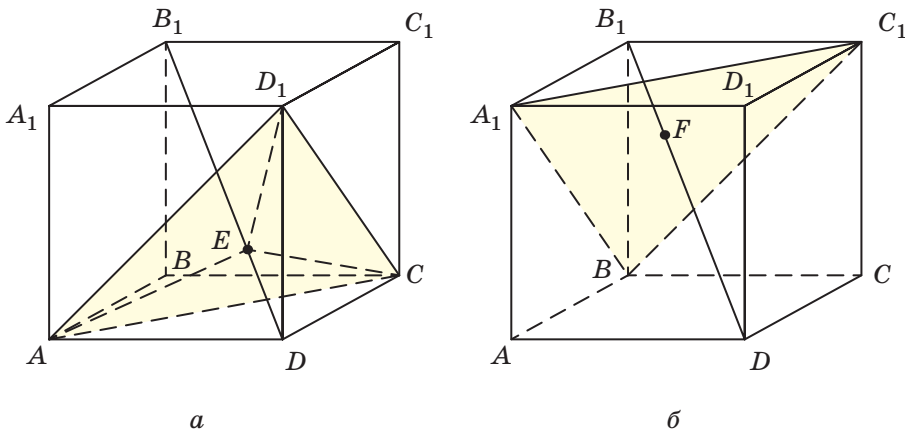


Рис. 2.46

2.5.3 УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

Ещё одно очень важное понятие, связанное с понятиями перпендикуляра, наклонной и её проекции, – *угол между прямой и плоскостью*.

Сразу можно заметить, что если прямая параллельна плоскости, то угол между этой прямой и плоскостью можно считать равным 0° . Угол между прямой, перпендикулярной плоскости, и этой плоскостью равен 90° .



Как можно сформулировать определение угла между прямой, пересекающей плоскость, и самой плоскостью?

При этом мы рассматриваем прямую, не перпендикулярную к плоскости.

На рис. 2.47 изображена прямая AB , пересекающая плоскость в точке B . Выясним, что можно понимать под углом между прямой AB и плоскостью α .

Проведём через точку B прямые BC и BD , лежащие в плоскости α (рис. 2.48). Можно ли считать, что $\angle ABC$ или $\angle ABD$ являются углом между прямой AB и плоскостью α ? Нет. Можно дать такое определение угла между прямой и плоскостью:

Определение 19. Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и её проекцией на плоскость.

На рис. 2.49 мы имеем прямую AB , пересекающую плоскость α , AO – перпендикуляр к плоскости α , BO – проекция AB на плоскость α , $\angle \gamma$ – угол между прямой AB и плоскостью β .

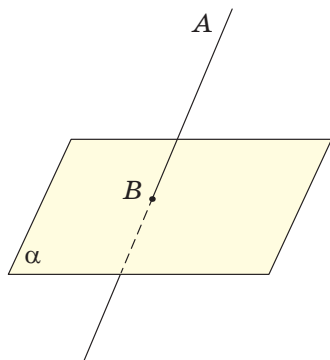


Рис. 2.47

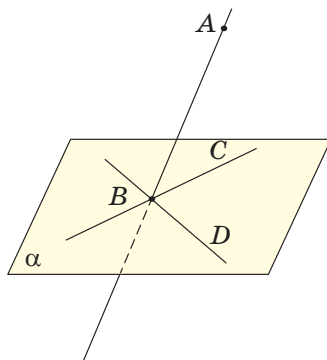


Рис. 2.48

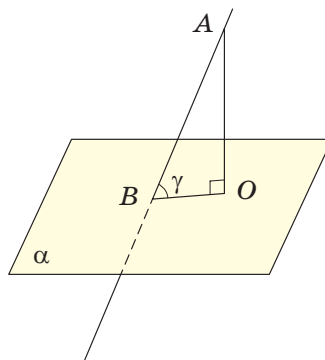
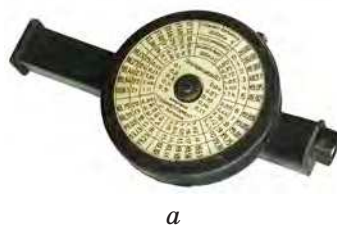


Рис. 2.49

Понятие «угол между прямой (наклонной) и плоскостью» используется многими специалистами. Под определёнными углами к плоскости горизонта сооружают эскалаторы на станциях метро, шахтные уклоны, фуникулёры, наклонные мосты доменных печей и многие другие сооружения. Под разными углами к плоскости аэродрома взлетают самолеты. Артиллеристы различают: угол возвышения – между линией выстрела и горизонтом, угол места цели – между линией цели и горизонтом, угол падения, угол встречи и т.д.

Угол между прямой и горизонтальной плоскостью геодезисты и маркшейдеры измеряют эклиметром (рис. 2.50а). В его цилиндрическом корпусе при нажатой кнопке свободно вращается и устанавливается по отвесу градуированный диск. Если кнопку отпустить, диск закрепляется, и на его шкале можно прочесть градусную меру измеряемого угла. Если требуется большая точность, такие углы измеряют теодолитами (рис. 2.50б).



а



б

Рис. 2.50



ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

2.6.1 ПОНЯТИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Завершая изучение случаев взаимного расположения прямых и плоскостей, рассмотрим ещё один случай – *параллельность прямой и плоскости*.

Дадим определение параллельности прямой и плоскости:

Определение 20. Плоскость и прямая называются *параллельными*, если они не имеют общих точек.

На рис. 2.51 прямая a и плоскость α не имеют общих точек, значит, они параллельны друг другу. Параллельность прямой a и плоскости α записывается так: $a \parallel \alpha$ (или $\alpha \parallel a$).

Можно говорить об отрезках (или лучах), параллельных плоскости. Отрезок (или луч) называется параллельным плоскости, если он является частью прямой, параллельной плоскости. Нам часто придётся рассматривать именно отрезки прямых, параллельных некоторой плоскости.

Каждое ребро прямоугольного параллелепипеда (куба) параллельно плоскостям двух его граней (рис. 2.52). Прямая, проведённая в грани бру-

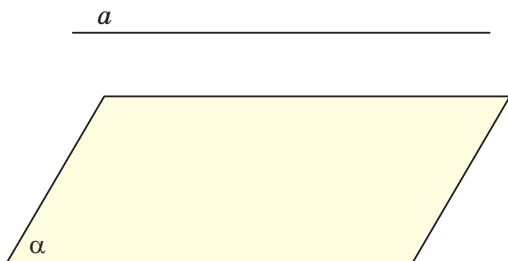


Рис. 2.51

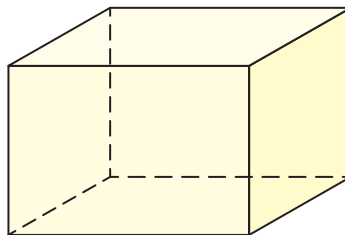


Рис. 2.52

ска с помощью рейсмуса, параллельна плоскостям трёх граней (рис. 2.53). Каменщики кладут стену под отвес (рис. 2.54), шнур которого параллелен плоскости стены. Всё это – материальные модели, характеризующие понятие параллельности прямой и плоскости.

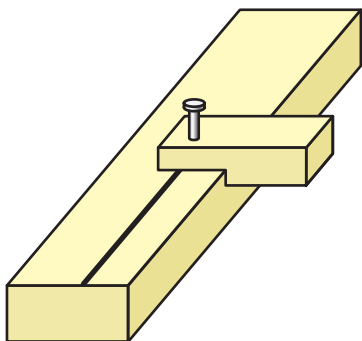


Рис. 2.53

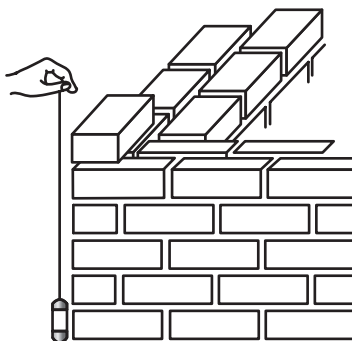


Рис. 2.54

2.6.2 ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим некоторые признаки параллельности прямой и плоскости.

Теорема 19. Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, расположенной в этой плоскости, то она параллельна этой плоскости.

Доказательство

1. Прямая b лежит в плоскости α ($b \subset \alpha$). } (дано) (рис. 2.55а)
2. $a \parallel b$.
3. $a \parallel \alpha$ (требуется доказать).
4. То, что $a \parallel b$, значит: прямые a и b не имеют общих точек и лежат в одной плоскости. Обозначим эту плоскость β (построение) (рис. 2.55б).
5. Плоскости α и β пересекаются по прямой b (рис. 2.55б).
Вспользуемся методом доказательства от противного.
6. Предположим, что прямая a пересекает плоскость α в некоторой точке O (предположение) (рис. 2.55 в).
7. Т.к. $O \in \beta$ и $O \in \alpha$, то $O \in b$ (6).
8. O – общая точка прямых a и b (6, 7).
- 9 (3). П. 7 противоречит п. 2. Значит, предположение п. 6 неверно и $a \parallel \alpha$. ■

Имеет место и теорема, обратная теореме 19.

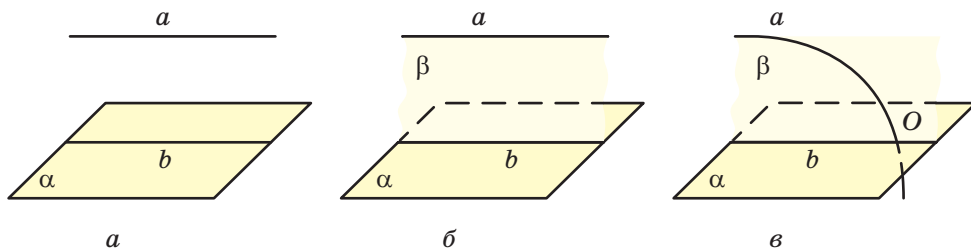


Рис. 2.55

Теорема 20 (обратная признаку параллельности прямой и плоскости).

Если прямая параллельна плоскости, то она параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости.

Подумайте над доказательством этой теоремы. Её доказательство следует из приводимой ниже теоремы 21.

Теорема 21. Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения параллельна данной прямой.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Теорема 21 позволяет ещё одним способом устанавливать параллельность прямых в пространстве.

Параллельными будут такие две прямые, одна из которых параллельна плоскости, а другая есть линия пересечения этой плоскости с другой плоскостью, проходящей через первую прямую.

Рассмотрим ещё одну теорему, тоже являющуюся признаком параллельности прямой и плоскости.

Теорема 22. Если плоскость и не лежащая в ней прямая перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

Доказательство.

1. $AB \perp AC$.
2. Прямая AC перпендикулярна плоскости α . } (дано) (рис. 2.56а)

3. Прямая AB параллельна плоскости α (требуется доказать).

Воспользуемся методом доказательства от противного.

Так как прямая AB не лежит в плоскости α , то точки A и C различны.

4. Предположим, что прямая AB пересекается с плоскостью α в некоторой точке M (предположение) (рис. 2.56б).

5. Соединим прямой точки M и C (построение) (рис. 2.56в).

6. $MA \perp AC$, $MC \perp AC$ (1, 2, 4, 5).

7 (3). П. 6 выполняться не может, так как через точку к прямой можно провести только один перпендикуляр. Значит, предположение п. 4 неверно и прямая AB параллельна плоскости α . ■

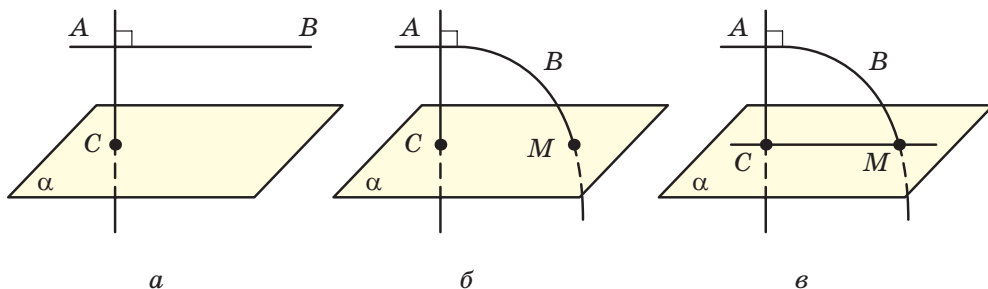


Рис. 2.56

Мы уже несколько раз говорили о свойстве транзитивности параллельных прямых. Сейчас мы сможем доказать это свойство.

Теорема 23 (о двух прямых, параллельных третьей). Если две различные прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.

Аналогичная теорема для прямых, лежащих в одной плоскости, была доказана в курсе геометрии 8-го класса (теорема 29). Рассмотрим случай, когда три прямые не лежат в одной плоскости.

Для установления параллельности прямых a и b можно воспользоваться теоремой 20 .

1. $a \parallel c, b \parallel c$ (дано) (рис. 2.57).

2. Требуется доказать, что $a \parallel b$.

3. Через параллельные прямые a и c проводим плоскость α , а через параллельные прямые b и c – плоскость β (рис. 2.57).

4. Так как параллельность прямых a и b ещё не доказана, то через точку B прямой b и прямую a проведём плоскость γ (Т.2).

5. Плоскости γ и β пересекаются (4).

6. Пусть прямая их пересечения b_1 .

7. Так как $a \parallel c$, а $c \subset \beta$, то по признаку параллельности прямой и плоскости $a \parallel \beta$.

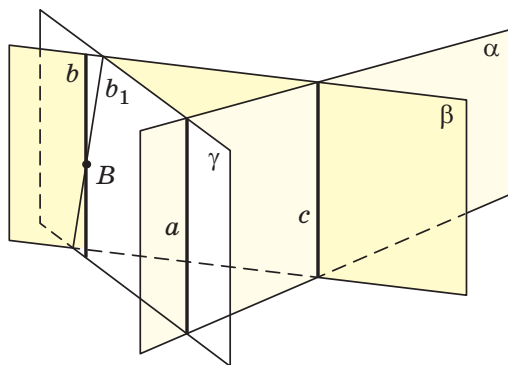


Рис. 2.57

8. Имеем: через прямую a , параллельную плоскости β , проходит плоскость γ , пересекающая β по прямой b_1 . Тогда по Т.20 $a \parallel b_1$.

9. Аналогично докажем, что $c \parallel b_1$. В самом деле, $c \parallel a$, значит, $c \parallel \gamma$.

10. Через прямую c проходит плоскость β , пересекающая γ по прямой b_1 .

11. Значит $c \parallel b_1$, но по условию $c \parallel b$, следовательно, b_1 совпадает с b .

А так как $a \parallel b_1$, то $a \parallel b$, что и требовалось доказать. ■

Доказанная теорема позволяет ещё одним способом устанавливать параллельность двух прямых. Параллельными являются такие две различные прямые, каждая из которых параллельна третьей прямой.

РАЗВИВАЕМ УМЕНИЯ

ЗАДАЧИ К § 2.1–2.4

Н



- 1 Известно, что прямая AO перпендикулярна плоскости α . Назовите прямые углы на рис. 2.58.
- 2 Точки K, M, S лежат в плоскости γ и прямая AP перпендикулярна плоскости γ (рис. 2.59). Какие из следующих углов должны быть прямыми: $\angle APS, \angle KPS, \angle MPK, \angle KPA, \angle MPS, \angle KPM$?
- 3 Точки O, K и M на рис. 2.60 принадлежат плоскости α , а точка E ей не принадлежит.
 - а) Назовите плоскости, определяемые точками на этом рисунке.
 - б) Какие углы на этом рисунке должны быть прямыми, если отрезок OM перпендикулярен плоскости $OЕК$?

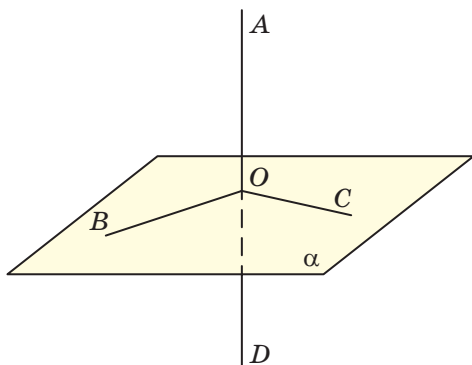


Рис. 2.58

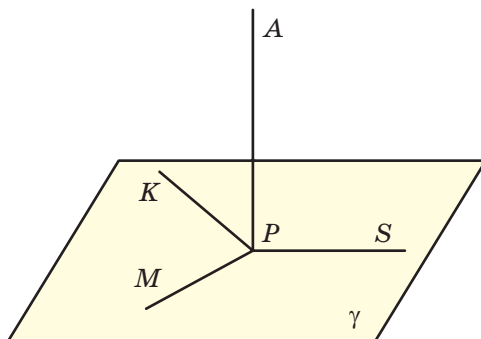


Рис. 2.59

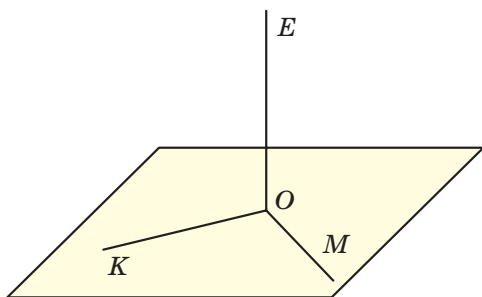


Рис. 2.60

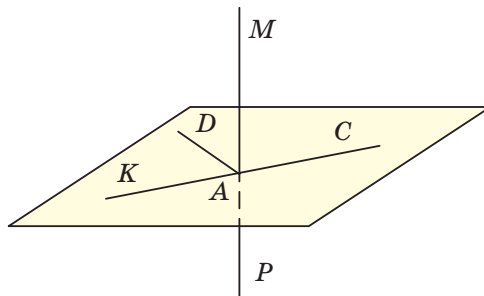


Рис. 2.61

- 4 Точки A, C, D, K принадлежат плоскости α , а прямая MP перпендикулярна плоскости α (рис. 2.61). Назовите все углы, о которых можно утверждать, что они являются прямыми.



- 5 На рис. 2.62 прямая AB пересекает плоскость α в точке O . Прямая CD лежит в плоскости α и $AO \perp CD$. Следует ли из этого, что прямая AB перпендикулярна плоскости α ?
- 6 Прямая перпендикулярна двум сторонам треугольника. Следует ли из этого, что она перпендикулярна третьей стороне треугольника?
- 7 Прямая перпендикулярна двум радиусам OA и OB окружности. Следует ли из этого, что эта прямая перпендикулярна плоскости окружности?

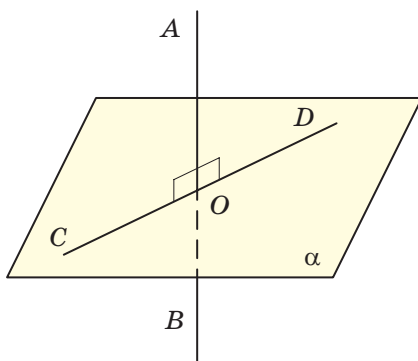


Рис. 2.62

- 8 Верно ли утверждение, что прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна лежащим в этой плоскости: а) двум прямым; б) двум сторонам квадрата; в) двум сторонам трапеции; г) двум касательным к окружности; д) двум сторонам правильного пятиугольника?
- 9 Прямая перпендикулярна сторонам AB и AC треугольника ABC . Будет ли эта прямая перпендикулярна:
а) медиане AM треугольника ABC ;
б) диаметру окружности, описанной около треугольника ABC ?

10 Верно или нет каждое из приведённых далее утверждений? Ответ обоснуйте. Можно сделать рисунок.

- а) Три прямые могут пересекаться в одной точке так, что каждая из них будет перпендикулярна двум другим.
- б) Если прямая перпендикулярна каждой из двух других прямых, то она перпендикулярна плоскости, содержащей эти две прямые.
- в) Существует ровно одна прямая, перпендикулярная данной плоскости в данной её точке.
- г) Если какая-либо прямая пересекает некоторую плоскость только в одной точке, то в этой плоскости существуют по крайней мере две прямые, перпендикулярные этой прямой.
- д) Через данную точку можно провести только одну прямую, перпендикулярную данной прямой.
- е) Если три прямые попарно пересекаются, но нет точки, принадлежащей всем трём прямым, то эти три прямые лежат в одной плоскости.

11 Как расположены по отношению друг к другу прямая l – линия пересечения двух стен в вашем классе и плоскость α пола? Обоснуйте ваш ответ. Перпендикулярна ли прямая l каждой прямой, лежащей в плоскости α ? Сколько прямых в плоскости α перпендикулярны прямой l ?

Н

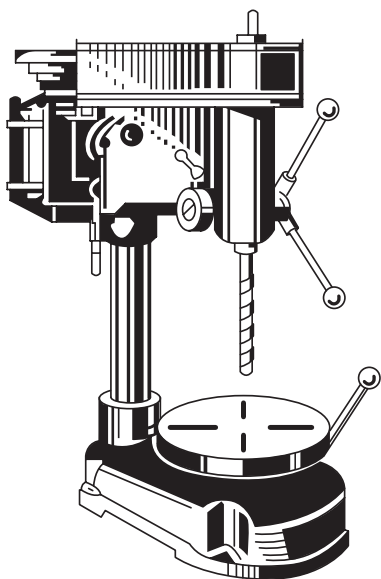


Рис. 2.63

- 12** а) Через данную точку, принадлежащую данной прямой, проведите прямую, перпендикулярную к данной прямой. Сколько решений имеет задача?
б) Докажите, что все прямые, удовлетворяющие условию задачи, лежат в одной плоскости.
- 13** Точка A не принадлежит плоскости α . Постройте прямую, проходящую через точку A и образующую с плоскостью α острый угол. Принадлежат ли все искомые прямые одной плоскости?
- 14** Сторона AB правильного треугольника ABC лежит в плоскости α . Может ли быть перпендикулярной к этой плоскости: а) прямая BC ; б) прямая CD , где D – середина стороны AB ?

- 15** В треугольной пирамиде $MABC$ $AB = BC = AC$ и $MA = MB = MC$. Точка E – середина AB . Докажите, что прямая AB перпендикулярна плоскости EMC .
- 16** При ремонте сверлильного станка (рис. 2.63) слесарь должен с помощью угольника выверить перпендикулярность оси сверла к плоскости стола, на котором крепится деталь. Как это сделать?
- 17** Ребро куба равно a . Найдите расстояния от точки пересечения диагоналей одной из граней до вершин противоположащей ей грани.
- 18** Диагональ BD_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна a , диагональ AD_1 грани равна b . Вычислите расстояние AB . Достаточно ли данных, чтобы вычислить расстояние BC ?
- 19** Прямые a, b, c лежат в плоскости α . Прямая m перпендикулярна прямым a и b , но не перпендикулярна прямой c . Каково взаимное расположение прямых a и b ?
- 20** Через данную точку проведите плоскость, перпендикулярную данной прямой.
- 21** Через данную точку проведите прямую, перпендикулярную данной плоскости.
- 22** На ребре AB прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ дана точка M . Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной прямой AB .
- 23** Даны куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и точка M , принадлежащая отрезку AC , причём $AM : MC = 2 : 1$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной прямой AC .
- 24** Все рёбра треугольной пирамиды $ABCD$ имеют равные длины.
 а) Постройте сечение, содержащее данную точку M ребра AD и перпендикулярное этому ребру.
 б) Вычислите площадь сечения, если длины рёбер равны a и $AM : MD = 3 : 1$.
- 25** Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 2BC$, $AA_1 = BC$.
 а) Докажите, что прямая BD_1 не перпендикулярна плоскости $A_1 C_1 D$.
 б) Вычислите углы между прямой BD_1 и каждой из прямых $A_1 C_1, C_1 D, DA_1$.

П

- 26** Точки A, B, X лежат на одной прямой в плоскости α , а точки P и Q – по одну сторону от α (рис. 2.64). Докажите, что если $PB = QB$ и $PA = QA$, то $PX = QX$. Сохранит ли ваше доказательство силу, если: а) точки P

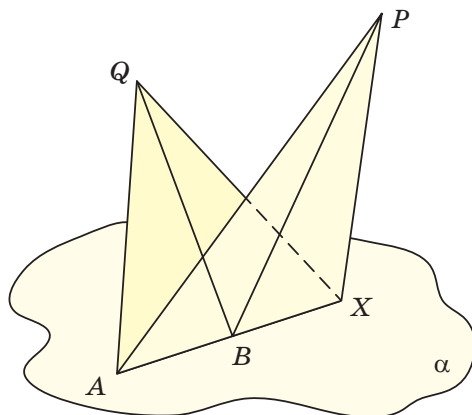


Рис. 2.64

и Q будут лежать по разные стороны от плоскости α ; б) точки P и Q будут принадлежать плоскости α ?

27 Верно ли, что если точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, $AD = DC$, $BC = BA$ и $\angle DBA$ – прямой угол, то по крайней мере один из изображённых на рис. 2.65 отрезков перпендикулярен одной из плоскостей. Ответ обоснуйте. Укажите эти перпендикулярные отрезок и плоскость.

28 Точки P и M лежат в разных полупространствах относительно плоскости α и равноудалены от неё. Перпендикуляры из точек P и M на плоскость α пересекают эту плоскость соответственно в точках O и S (рис. 2.66). Докажите, что:

- отрезок PM пересекает отрезок SO в некоторой точке K ;
- точка K является серединой отрезка SO .

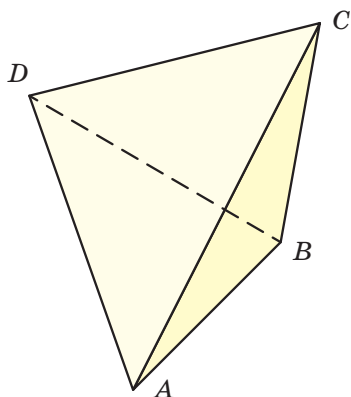


Рис. 2.65

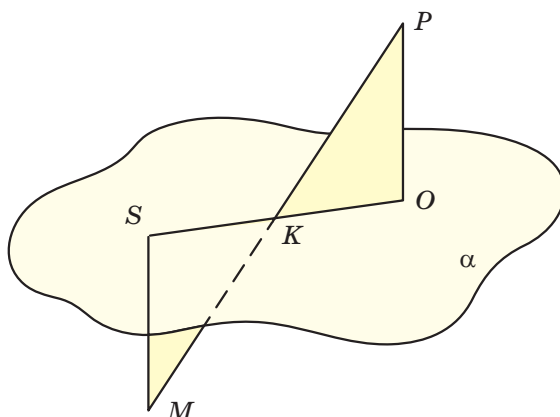


Рис. 2.66

- 29** Какой вид имеют сечения куба, перпендикулярные его диагонали? Какое из них имеет наибольшую площадь? Чему она равна в кубе с ребром 1?

ЗАДАЧИ к § 2.5



- 30** На рис. 2.67 прямая OA перпендикулярна плоскости α , прямая AB – наклонная к плоскости α . Какой отрезок является проекцией наклонной AB на плоскость α ?

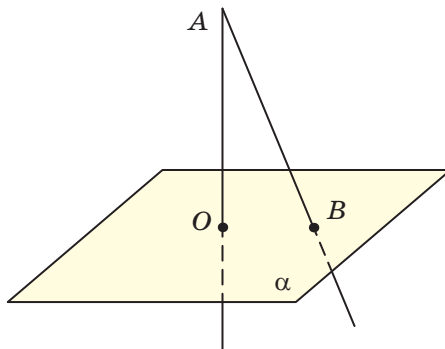


Рис. 2.67

- 31** В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SA перпендикулярно основанию пирамиды. Назовите какие-нибудь углы, равные углам между прямыми SB и SC и плоскостью основания пирамиды (рис. 2.68).

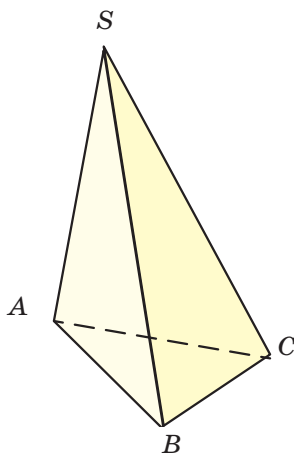


Рис. 2.68

- 32** На изображении прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 2.69) укажите общий перпендикуляр прямым: а) $A_1 D_1$ и BB_1 ; DC и $B_1 C_1$; CC_1 и AB .

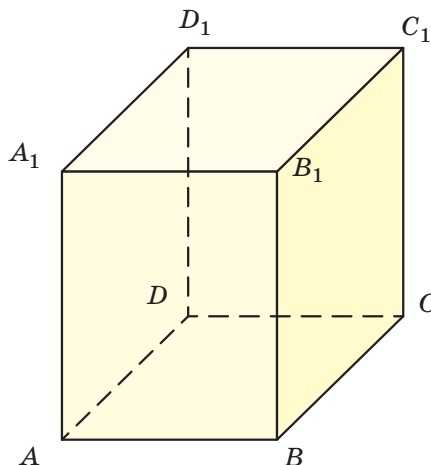


Рис. 2.69

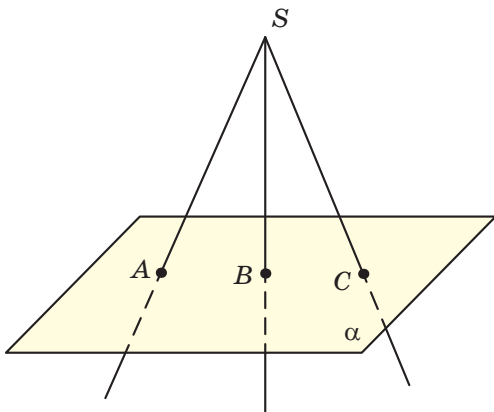


Рис. 2.70

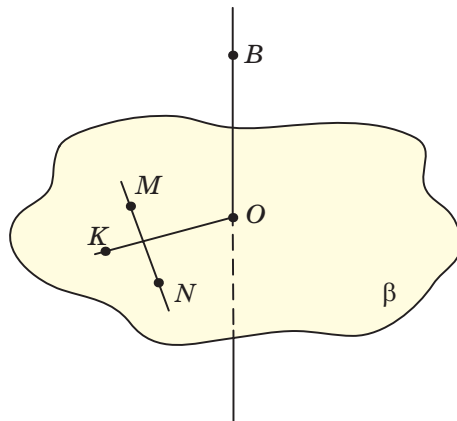


Рис. 2.71

Н



- 34** Могут ли быть перпендикулярны к одной плоскости две стороны: а) треугольника; б) трапеции; в) правильного шестиугольника?
- 35** Назовите какие-нибудь углы, равные углам между прямыми SA , SB , SC и плоскостью α , если $SB \perp \alpha$.
- 36** Может ли проекция отрезка на плоскость быть: а) меньше отрезка; б) равна отрезку; в) больше отрезка; г) точкой?
- 37** На рис. 2.71 прямая BO перпендикулярна плоскости β , OK и MN – прямые в плоскости β , причём $MN \perp OK$. Что можно сказать о взаимном расположении прямых MN и BK ? Ответ обоснуйте.
- 38** Установите, верны ли утверждения:
 а) если прямая перпендикулярна проекции наклонной, то эта прямая перпендикулярна самой наклонной;
 б) если прямая перпендикулярна наклонной и её проекции, то эта прямая лежит в плоскости проекций.
- 39** Точка, лежащая вне плоскости ромба, равноудалена от всех прямых, содержащих его стороны. Обязательно ли эта точка равноудалена от вершин ромба?
- 40** а) Для какого треугольника точка пространства, равноудалённая от его вершин, равноудалена и от прямых, содержащих его стороны?
 б) Решите аналогичную задачу для четырёхугольника.

- 41** В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ за плоскость проекции принята плоскость грани $ABCD$. Что будет проекцией: а) точки пересечения диагоналей грани $BB_1 C_1 C$; б) грани $A_1 B_1 C_1 D_1$; в) грани $AA_1 D_1 D$; г) ребра $B_1 C_1$?

Н

- 42** Отрезок MA_1 длиной 12 см является проекцией отрезка MA на плоскость α . Известно, что $AA_1 = 9$ см, точка B принадлежит отрезку MA , $AB : BM = 2 : 3$. Найдите длины отрезка AB и его проекции на плоскость α .
- 43** Точки A и B расположены по разные стороны от плоскости α и не лежат на перпендикуляре к этой плоскости, а точки A_1 и B_1 – их проекции на плоскость α .
а) Докажите, что прямые AB и $A_1 B_1$ пересекаются.
б) Найдите расстояние от точки их пересечения до точек A и B_1 , если $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $AB = c$.
- 44** Точки A и B принадлежат плоскости α , отрезки AA_1 и BB_1 перпендикулярны плоскости α . Найдите:
а) $\angle BB_1 A_1$, если $\angle AA_1 B_1 = \varphi$; б) $A_1 B_1$, если $AA_1 = 10$ см, $BB_1 = 18$ см, $A_1 B = 15$ см.
- 45** Длина стороны ромба с острым углом в 60° равна a . Через одну из сторон проведена плоскость; длина проекции другой стороны на эту плоскость равна b . Найдите длины проекций диагоналей.
- 46** Из точки A проведены к одной и той же плоскости перпендикуляр $AC = 40$ см и наклонная $AB = 50$ см. Найдите длину проекции наклонной.
- 47** Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние 1 м, проведены две равные наклонные. Найдите расстояние между основаниями наклонных, если известно, что наклонные перпендикулярны и образуют с перпендикуляром к плоскости углы, равные 60° .
- 48** Длина стороны равностороннего треугольника равна 3 м. Найдите расстояние до плоскости треугольника от точки, которая находится на расстоянии 2 м от каждой из его вершин.
- 49** К плоскости квадрата $ABCD$ проведён перпендикуляр AM . Найдите расстояние от точки M до прямых AB , BC и BD , если $AB = 3$ дм, $MB = 4$ дм.
- 50** Прямая a лежит в плоскости α , точка M не принадлежит этой плоскости. Сравните расстояние от точки M до α с расстоянием от M до a . В каком случае эти расстояния равны?

- 51** Катеты прямоугольного треугольника равны a и b . Точка M находится на расстоянии h от плоскости треугольника и на одинаковом расстоянии от всех его вершин. Найдите это расстояние.
- 52** Точка M находится на расстоянии l от всех вершин треугольника ABC . Найдите расстояние от точки M до плоскости треугольника, если $BC = a$ и $\angle BAC = \alpha$.
- 53** Найдите множество всех точек, каждая из которых одинаково удалена от всех вершин: а) прямоугольника; б) равнобедренной трапеции; в) ромба, не являющегося квадратом.
- 54** Найдите множество всех точек плоскости α , удалённых от данной точки A , не лежащей в плоскости α , на расстояние l .
- 55** Найдите множество всех точек плоскости α , удалённых от данной точки A , не лежащей в плоскости α , на расстояние: а) меньше, чем l ; б) больше l .
- 56** Концы отрезка, не пересекающего плоскость, удалены от нее на 7 см и 13 см. На какое расстояние удалена от плоскости середина отрезка?
- 57** Сторона основания и боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды имеют одинаковую длину. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания.
- 58** Найдите угол наклона диагонали AC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ к плоскости: а) $ABCD$; б) $BB_1 D_1 D$.
- 59** Луч OA образует с плоскостью α ($O \in \alpha$) угол φ . Какой угол образует этот луч с перпендикуляром к данной плоскости?
- 60** Из вершины прямого угла прямоугольного треугольника с катетами a и b проведён перпендикуляр к плоскости треугольника. Длина перпендикуляра равна h . Найдите расстояние от его конца, не лежащего в плоскости треугольника, до гипотенузы.
- 61** Стороны треугольника равны 20 см, 65 см и 75 см. Из вершины большего угла треугольника проведён к его плоскости перпендикуляр длиной 60 см. Найдите расстояние от концов перпендикуляра до большей стороны треугольника.
- 62** На плоскости α проведены две параллельные прямые, расстояние между которыми равно m . Точка S находится на расстоянии h от плоскости α и на одинаковом расстоянии от обеих прямых. Найдите это расстояние.
- 63** На плоскости α проведены параллельные прямые a и b , расстояние между ними равно 44 см. Прямая c , параллельная данным прямым, удалена от плоскости α на 15 см, а от прямой a – на 39 см. Найдите расстояние между прямыми b и c .

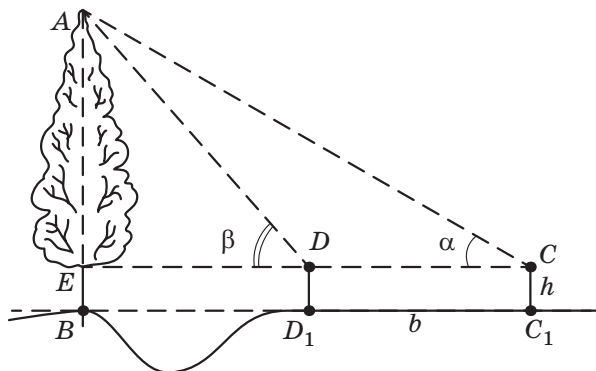


Рис. 2.72

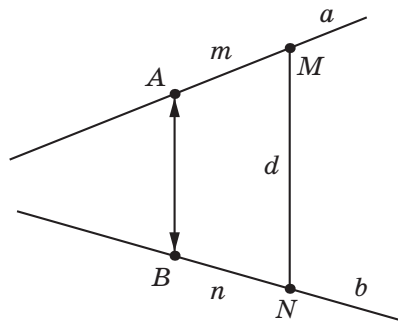


Рис. 2.73

- 64** Точка M равноудалена от всех вершин правильного треугольника со стороной a и удалена от плоскости треугольника на расстояние b . Найдите расстояния от точки M до прямых, содержащих стороны треугольника.
- 65** По данным рис. 2.72 найдите длину отрезка AB (высота дерева). Отрезки AB , DD_1 , CC_1 перпендикулярны прямым BC_1 и CD ; $CC_1 = h$, $D_1C_1 = b$, $\angle ACE = \alpha$, $\angle ADE = \beta$.

П

- 66** Докажите, что прямая, перпендикулярная плоскости, пересекает эту плоскость.
- 67** Прямая a , перпендикулярная плоскости α , пересекает эту плоскость в точке A . Докажите, что прямая b , проведённая через точку A перпендикулярно прямой a , лежит в плоскости α .
- 68** Докажите, что через данную точку нельзя провести две различные плоскости, перпендикулярные данной прямой.
- 69** Даны скрещивающиеся прямые a и b , угол между которыми равен φ ; длина их общего перпендикуляра MN равна d (рис. 2.73). На данных прямых взяты соответственно точки A и B так, что $MA = m$, $NB = n$. Найдите AB .
- 70** Через одну из сторон ромба проведена плоскость на расстоянии 4 см от противоположающей его стороны. Проекции диагоналей ромба на эту плоскость равны 8 см и 2 см. Найдите проекции сторон.
- 71** Проекцией равнобедренного треугольника с боковой стороной a и основанием b ($a \neq b$) служит равносторонний треугольник. Найдите длину его стороны.

М

- 72** Докажите, что угол между прямой и плоскостью – наименьший из углов, образованных этой прямой со всевозможными прямыми, лежащими в плоскости.
- 73** Параллелограмм $ABCD$ является проекцией ромба на некоторую плоскость, а отрезок MN в этой плоскости – проекцией перпендикуляра к плоскости ромба, причём точка M принадлежит отрезку AB .
- Постройте прямые, проходящие через точку N и перпендикулярные диагоналям ромба.
 - Достаточно ли данных для построения прямых, проходящих через точку N перпендикулярно сторонам ромба?

ЗАДАЧИ к § 2.6**Н**

- 74** На рис. 2.74 изображены параллельные прямая a и плоскость α . Какими свойствами обладают эти фигуры?
- 75** На рис. 2.75 изображён прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Ответьте на вопросы:
- Плоскости каких граней параллельны ребру BC ?
 - Каким граням параллельно ребро $A_1 D_1$?

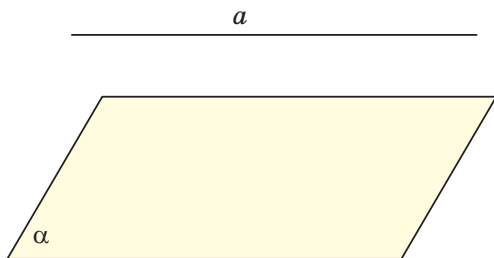


Рис. 2.74

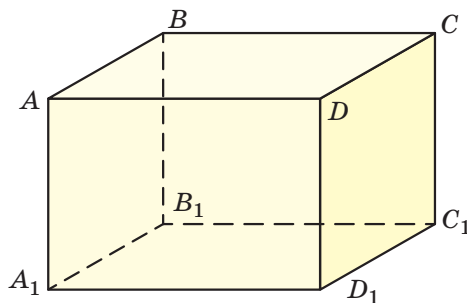


Рис. 2.75

Н

- 76** Пусть прямая l параллельна плоскости. Ответьте на вопросы:
- Существуют ли на плоскости прямые, параллельные l ? Если да, то сколько найдётся таких прямых?
 - Существуют ли на плоскости прямые, не параллельные l ? Если да, то сколько таких прямых?

- 77** Две прямые параллельны плоскости. Ответьте на вопросы:
а) Параллельны ли они между собой?
б) Найдётся ли на плоскости прямая, параллельная обоим данным прямым?
- 78** Прямая параллельна двум пересекающимся плоскостям. Параллельна ли она линии их пересечения?
- 79** Даны параллельные прямые a и b и плоскость ϕ , параллельная прямой a . Каким может быть взаимное расположение прямой b и плоскости α ?
- 80** Даны две скрещивающиеся прямые a и b и плоскость α , параллельная прямой b . Каким может быть взаимное расположение прямой a и плоскости α ?
- 81** Верно ли утверждение, что прямая, параллельная плоскости, не пересекает ни одну из прямых, лежащих в этой плоскости?
- 82** Плоскость α и прямая a параллельны. Прямая b пересекает прямую a . Каким может быть взаимное расположение прямой b и плоскости α ?
- 83** Известно, что прямая a параллельна плоскости α и прямая b параллельна плоскости α . Верно ли утверждение, что прямые a и b параллельны?
- 84** Что надо знать о прямой и плоскости, чтобы утверждать, что они параллельны?
- 85** Известно, что прямая параллельна плоскости. Ответьте на вопросы:
а) Параллельна ли она любой прямой, лежащей в этой плоскости?
б) Может ли она пересечь хотя бы одну из таких прямых?
- 86** Прямая a пересекает плоскость α . Сколько можно провести прямых:
а) пересекающих плоскость α и параллельных прямой a ;
б) пересекающих прямую a и параллельных плоскости α ?

П

- 87** а) Через данную точку проведите плоскость, параллельную данной прямой.
б) Через данную точку проведите прямую, параллельную данной плоскости.
- 88** Прямые a и b параллельны. Через прямую a проведите плоскость, параллельную прямой b .
- 89** Даны скрещивающиеся прямые a и b . Через прямую a проведите плоскость, параллельную прямой b .

- 90** Прямая c параллельна плоскости α . На прямой c взяты различные точки M и N , а в плоскости α – различные точки A и B . Докажите, что для того, чтобы прямые MA и NB были пересекающимися или параллельными, необходимо и достаточно, чтобы прямые c и AB были параллельными.
- 91** Прямая c параллельна плоскости α , прямые a и b пересекают прямую c в точках A и B , а плоскость α — в точках A_1 и B_1 . Укажите, достаточным, необходимым или необходимым и достаточным условием параллельности прямых a и b являются такие условия:
а) прямая $A_1B_1 \parallel c$; б) прямая $A_1B_1 \parallel c$, $AA_1 = BB_1$; в) прямая $A_1B_1 \parallel c$, $AB = A_1B_1$.
- 92** Через вершину квадрата проведена плоскость α параллельно его диагонали. Докажите, что ортогональная проекция квадрата на плоскость α есть ромб.
- 93** Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Через середины отрезков BC_1 и B_1C , AC_1 и A_1C , AB_1 и A_1B проведены соответственно прямые a , b , c . Докажите, что эти три прямые параллельны некоторой плоскости.

ГЛАВА 3

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ

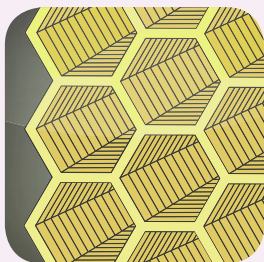
Предположение плоскости есть, как известно, совершенно идеальное построение, потому что в действительности плоскости не существует.

*Александр Афанасьевич Потебня
(русский филолог и литературовед, 1835—1891)*



В предыдущих главах мы уже встречались с различными случаями расположения плоскостей в пространстве, но это были отдельные примеры. В данной главе мы изучим этот вопрос подробно.

§ 3.1



ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПЛОСКОСТИ

Мы знаем, что любые две отличные друг от друга точки определяют одну и только одну содержащую их прямую.

На рис. 3.1 показано, что плоскостей, содержащих две данные точки A и B , может быть бесконечно много. Взяв одну из этих плоскостей, все остальные можно получить из неё вращением вокруг прямой (оси) AB . Чтобы выделить какую-либо из плоскостей, содержащих две данные точки A и B , надо фиксировать еще одну точку C , не лежащую на прямой AB .

По аксиоме 2 три не лежащие на одной прямой точки пространства определяют одну и только одну содержащую их плоскость.



Как могут располагаться в пространстве различные плоскости?

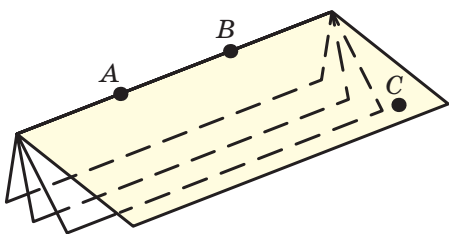


Рис. 3.1

Плоскости пола и потолка класса дают наглядное представление о непесекающихся плоскостях. Плоскость пола и плоскость стены дают представление о пересекающихся плоскостях. Их пересечение – прямая.

На рис. 3.1 и 3.3 мы видим несколько пересекающихся плоскостей.

В этом параграфе мы будем изучать *свойства пересекающихся плоскостей*.

Можно дать такое определение пересекающимся плоскостям:

Определение 21. Различные плоскости, которые имеют хотя бы одну общую точку, называются *пересекающимися*.

На вопрос о том, как в этом случае расположены плоскости, отвечает аксиома пересечения плоскостей (параграф 1.1, с. 9):

Аксиома 4. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.

На рис. 3.2 две различные плоскости α и β имеют общую точку A , а значит, по аксиоме 4 существует прямая a , лежащая в каждой из этих плоскостей. При этом если какая-либо точка принадлежит обеим плоскостям, то она принадлежит прямой a . Плоскости α и β в этом случае являются пересекающимися по прямой a . Через одну и ту же прямую можно провести бесконечно много различных пересекающихся плоскостей.

На рис. 3.3 изображены четыре плоскости α , β , γ и δ , проходящие через прямую AB . Как уже указывалось, вращением можно плоскость α перевести в любую другую плоскость, проходящую через прямую AB .

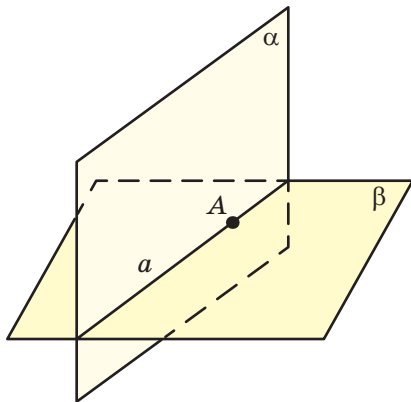


Рис. 3.2

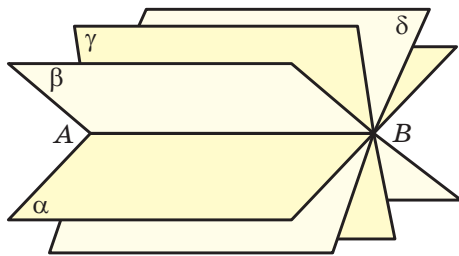


Рис. 3.3

Из наглядных соображений всё, что мы только что сказали, понятно, но в геометрии принято доказывать все утверждения, не являющиеся аксиомами. Докажем существование плоскости, пересекающей данную.

ЗАДАЧА 1

Дана плоскость α . Докажите, что существует другая плоскость β , пересекающая плоскость α .

Решение

1. Плоскость α (дана) (рис. 3.4а).
2. Мы хотим построить (доказать существование) плоскости β , пересекающей плоскость α . Как это можно сделать?
3. По аксиоме 2 для задания (построения) плоскости нам нужно иметь три точки (не лежащие на одной прямой), две из них разумно взять в плоскости α , а третью – вне плоскости α .
4. Возьмём точки A и B , принадлежащие плоскости α , и точку C , не принадлежащую ей (построение) (рис. 3.4б).
5. Точки A , B и C не лежат на одной прямой (действительно, если бы точка C лежала на прямой AB , то она принадлежала бы плоскости α , т.к. по аксиоме 4 все точки прямой AB принадлежат плоскости α). Через точки A , B и C можно провести плоскость β , и притом только одну (2, 2).
6. Плоскости α и β имеют общую точку. Такой точкой является, например, точка A или точка B (4, 5).
7. Плоскости α и β различные, т.к. точка C принадлежит плоскости β , но не принадлежит плоскости α (3, 4).
- 8 (2). Плоскости α и β пересекаются (по прямой AB) (4) (рис. 3.4в).

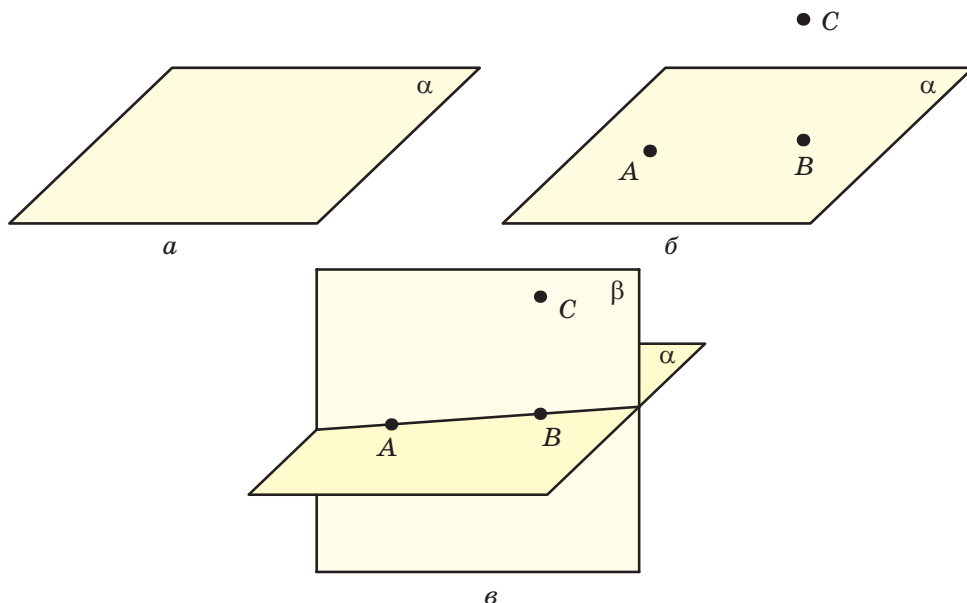


Рис. 3.4

Таким образом, мы доказали, что существует плоскость β , пересекающая плоскость α . ■

При изучении перпендикулярности прямой и плоскости мы начали решать *задачу на построение плоскости, перпендикулярной данной прямой и проходящей через данную точку* (параграф 2.4, с. 53). В тот момент мы решили эту задачу только для случая, когда точка лежит вне данной прямой, и при этом не доказали единственность такой плоскости.

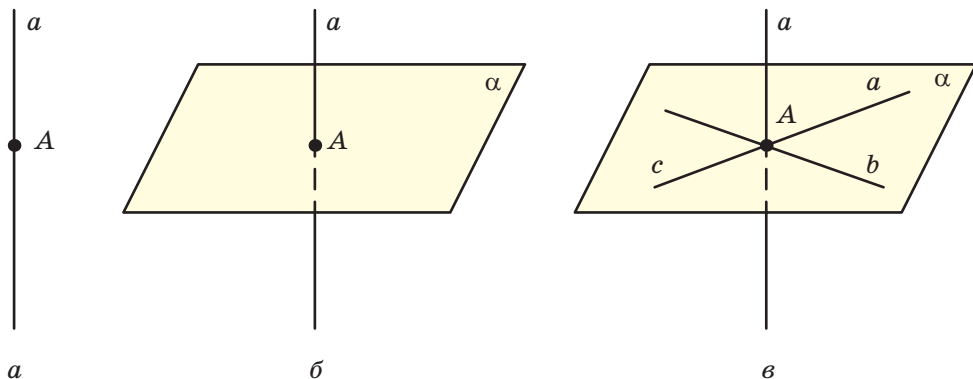


Рис. 3.5

Сейчас мы можем решить эту задачу полностью.

ЗАДАЧА 2

Через данную точку A , лежащую на данной прямой a , проведите плоскость, перпендикулярную этой прямой.

Решение

Нам даны прямая a и на ней точка A (рис. 3.5а).

Анализ. Пусть задача решена и нужная нам плоскость α построена (рис. 3.5б). Как же можно построить эту плоскость? Вспомнив теорему 8 (признак перпендикулярности прямой и плоскости), понимаем, что следует иметь две прямые b и c , перпендикулярные прямой a и лежащие в плоскости α (рис. 3.5в). Эти прямые и определяют искомую плоскость. Однако построить прямые b и c оказывается довольно трудно. Дело в том, что нужно иметь плоскости, в которых мы их построим, а таких плоскостей у нас нет (плоскость α – искомая, её нужно получить в результате решения).

Вот здесь мы используем свойства пересекающихся плоскостей. Выполним первый шаг построения, который будет использоваться и в дальнейшем.

1. Проведём через прямую a две произвольные пересекающиеся плоскости φ и γ (построение) (рис. 3.6а).

2. В каждой из этих плоскостей через точку A проведём соответственно прямые b и c , перпендикулярные прямой a (рис. 3.6б).

3. Через пересекающиеся прямые b и c проведём плоскость α (2, Т.3) (рис. 3.6в).

4. Плоскость α проходит через точку A и перпендикулярна прямой a , а значит, она искомая (3, Т.8).

Вы увидите, что построение плоскости α опирается на проведение пересекающихся плоскостей.

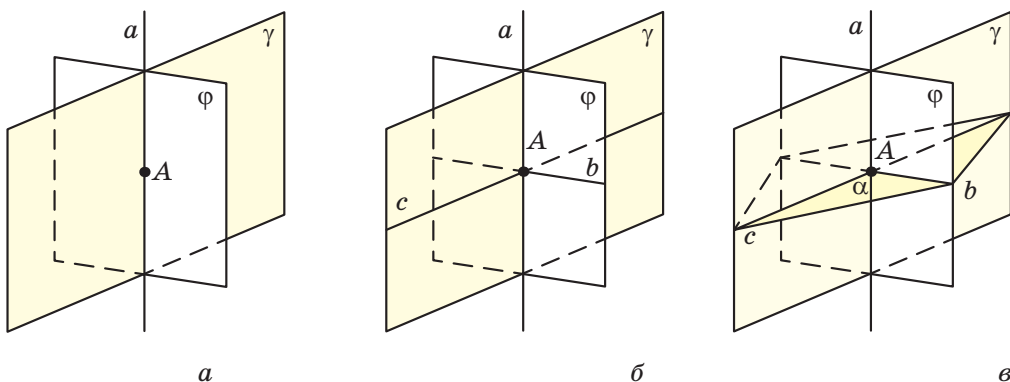


Рис. 3.6

Кроме самого построения плоскости *надо доказать единственность такой плоскости*. Доказательство проведём методом доказательства от противного.

1. Предположим, что кроме построенной нами плоскости α через точку A проходит ещё какая-нибудь плоскость β , перпендикулярная прямой a (рис. 3.7) (предположение).

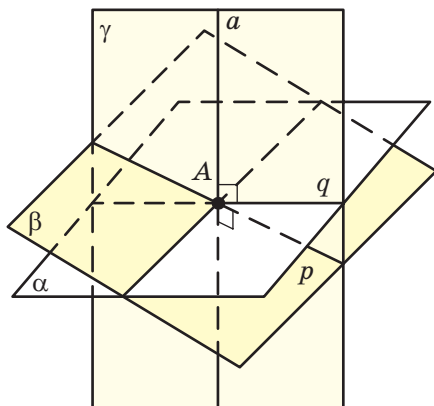


Рис. 3.7

2. Возьмём в плоскости β любую прямую p , проходящую через точку A и не лежащую в плоскости α (построение).

3. Проведём плоскость γ через пересекающиеся прямые a и p (1, 2, Т.3) (построение).

4. Плоскость γ пересечёт плоскость α по прямой q (3, 5).

5. Прямая q не совпадает с прямой p , так как q лежит в α , а p не лежит в α (2, 4).

6. Прямые p и q лежат в плоскости γ , проходят через точку A и перпендикулярны прямой a ($p \perp a$, т.к. $p \subset \beta$ и $a \perp \beta$, $q \perp a$, т.к. $q \subset \alpha$ и $a \perp \alpha$) (1, 2, 3, 4).

7. Пункт 6 противоречит известной вам из курса геометрии 7–9-го классов теореме о том, что в плоскости через данную точку проходит лишь одна прямая, перпендикулярная данной прямой.

Мы пришли к противоречию. Задача имеет единственное решение. ■

Решим теперь аналогичную задачу для случая, когда заданная точка не лежит на данной прямой.

ЗАДАЧА 3

Через данную точку A , не лежащую на данной прямой a , проведите плоскость, перпендикулярную этой прямой.

Решение

В предыдущей главе (параграф 3.4, с. 53) мы выполняли построение прямой, перпендикулярной плоскости. Но там мы не доказали единственность построенной плоскости. Докажем эту единственность.

1. Рассмотрим любую плоскость α , проходящую через точку A перпендикулярно прямой a (рис. 3.8а).

2. Проведём в плоскости α прямую b , проходящую через точку A и через точку B пересечения прямой a и плоскости α (построение) (рис. 3.8б).

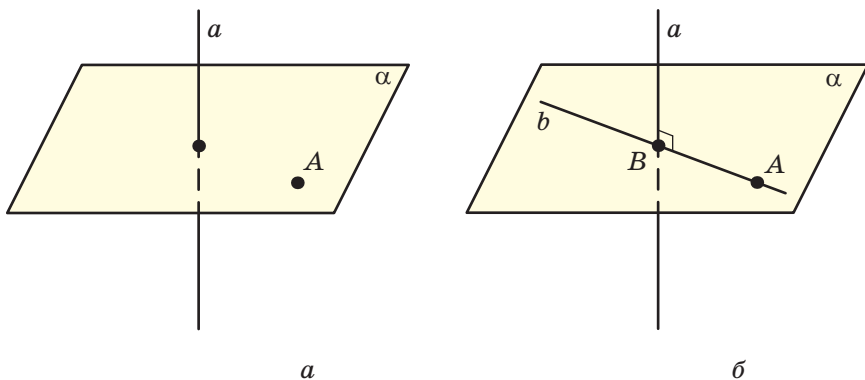


Рис. 3.8

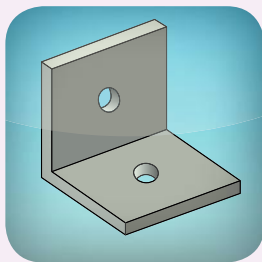
3. Такая прямая b только одна. Прямая b проходит через точку B и перпендикулярна прямой a (2).

4. Плоскость, проходящая через точку A и перпендикулярная прямой a , должна содержать точку B (1, 2, 3).

5. Плоскость α только одна (см. решение задачи 1). ■

Итак, решив эти задачи на построение и доказав единственность их решений, мы доказали следующую важную теорему:

Теорема 24. Через каждую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная данной прямой, и притом только одна.



ДВУГРАННЫЕ УГЛЫ

Две пересекающиеся плоскости разбивают пространство на четыре части. Каждую из этих частей называют *двугранным углом*.

На рис. 3.9 вы видите две плоскости α и β , пересекающиеся по прямой AB . Прямая AB разбивает каждую из плоскостей на две полуплоскости.

Можно дать такое определение двугранного угла:

Определение 22. *Двугранным углом называется объединение двух полуплоскостей, имеющих общую границу и одной из ограниченных ими частей пространства.*

Две полуплоскости, о которых идёт речь в определении двугранного угла, называются его *гранями*, а прямая – общая граница полуплоскостей (граней) – называется *ребром* двугранного ребра.

На рис. 3.10 изображены двугранные углы с ребром AB , один из них обозначен дужкой.

Возникает вопрос:



Как можно определить двугранный угол, используя понятие полупространства? Всякий ли двугранный угол можно так определить?

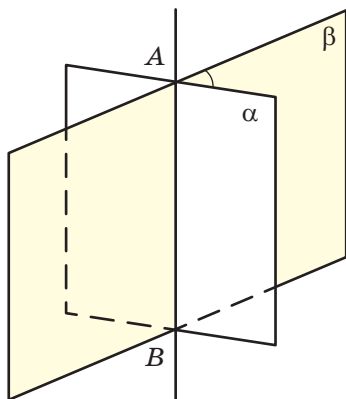
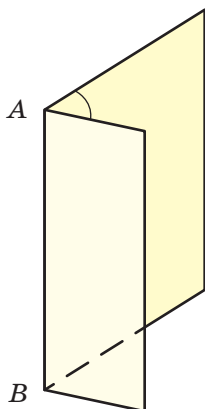


Рис. 3.9

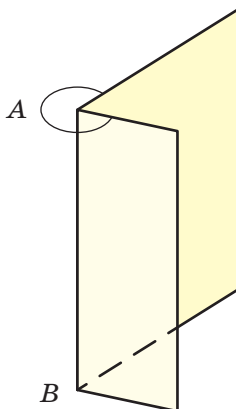
На рис. 3.10а мы видим, что обозначенный дужкой сверху двугранный угол можно определить как пересечение полупространств, а вот двугранный угол, также обозначенный дужкой на рис. 3.10б, нельзя определить как пересечение полупространств (объясните этот вывод). С другой стороны, двугранный угол, обозначенный дужкой на рис. 3.10б, можно определить как объединение полупространств,

а двугранный угол, обозначенный дужкой на рис. 3.10а, нельзя (объясните эти выводы).

Двугранный угол можно обозначать двумя буквами, поставленными у его ребра. На рис. 3.10а,б изображены двугранные углы AB . Но если при одном ребре лежит несколько двугранных углов, то каждый из них обозначают четырьмя буквами, из которых две средние стоят при ребре, одна крайняя – у одной грани и другая – у другой. На рис. 3.11 изображён двугранный угол $CABD$.



а



б

Рис. 3.10

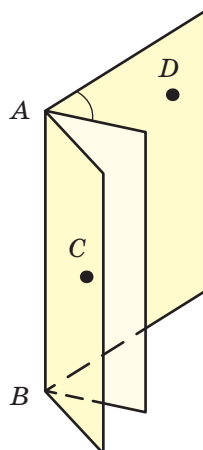


Рис. 3.11

Для измерения двугранных углов вводится понятие *линейного угла двугранного угла*.

Дадим определение этому понятию:

Определение 23. Если через произвольную точку ребра двугранного угла провести плоскость, перпендикулярную к ребру, то в пересечении этой плоскости с двугранным углом образуется угол, который называется *линейным углом двугранного угла*.

Из определения 23 понятно, что линейный угол двугранного угла образован двумя лучами, перпендикулярными ребру, с общим началом, лежащим на ребре, причём один из этих лучей лежит в одной грани двугранного угла, а другой – в другой грани.

На рисунке 3.12 изображён линейный угол AOB двугранного угла $ACOB$. Вершиной линейного угла служит точка O , лежащая на ребре OC двугран-

ного угла, а сторонами – лучи, лежащие в гранях двугранного угла, исходящие из точки O и перпендикулярные к ребру двугранного угла.

Двугранный угол может иметь бесконечное множество линейных углов. На рис. 3.13 изображены четыре линейных угла двугранного угла AO_1OB .

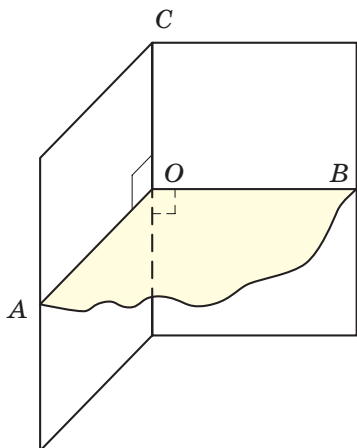


Рис. 3.12

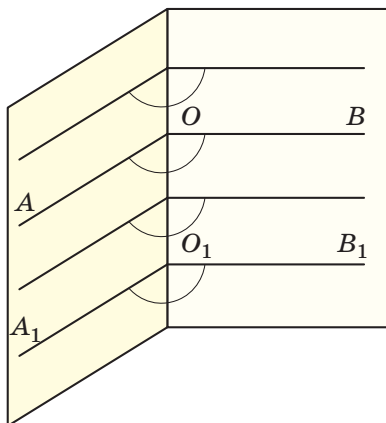


Рис. 3.13

Можно доказать такую теорему:

Теорема 25. Все линейные углы двугранного угла равны друг другу.

Доказательство

1. Двугранный угол OO_1 .
2. $\angle AOB$ и $\angle A_1O_1B_1$ – два произвольных линейных угла двугранного угла AB .
3. $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ (требуется доказать).
4. Лучи OA и O_1A_1 принадлежат одной грани (полуплоскости) и перпендикулярны к прямой OO_1 , поэтому они сонаправлены. Точно так же сонаправлены лучи OB и O_1B_1 (1, 2, определение сонаправленных лучей).
5. $\angle A_1O_1B_1 = \angle AOB$ (1, 4, свойство углов с сонаправленными сторонами). ■

Теорема 25 обеспечивает корректность следующего определения:

Определение 24. Величиной двугранного угла называется величина соответствующего ему линейного угла.

Величина двугранного угла на рис. 3.10а меньше 180° , а двугранного угла на рисунке 3.10б – больше 180° .

Двугранные углы являются пространственными аналогами плоских углов, в частности можно рассматривать вертикальные двугранные углы. На рис. 3.14а две пересекающиеся плоскости образуют две пары вертикальных углов (одна из них обозначена на рисунке дужками).

Точно так же можно говорить о двугранных смежных углах. На рис. 3.14б изображены два смежных двугранных угла $CABD$ и $DABE$.

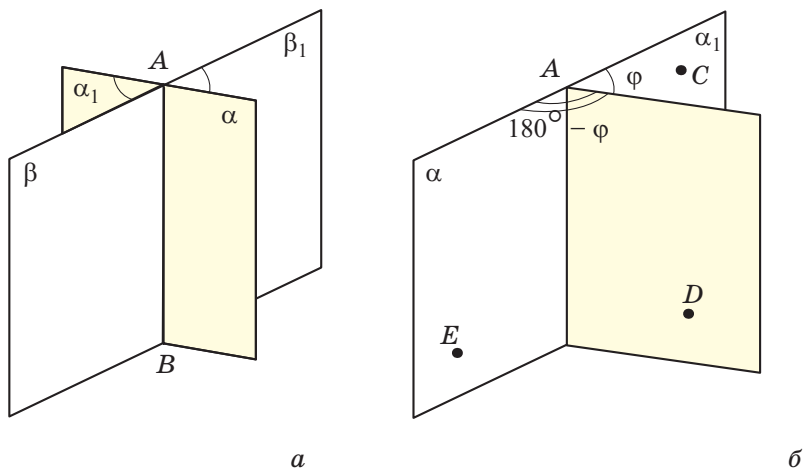


Рис. 3.14

Величины этих углов равны соответственно φ и $180^\circ - \varphi$.

Определение 25. Двугранный угол называется *прямым* (острым, тупым), если его величина равна 90° (меньше 90° , больше 90°).

Например, в кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 3.15) рассмотрим двугранный угол $B_1 A_1 A D$ с ребром AA_1 и $B_1 D_1 D A$ с ребром DD_1 .

1) $\angle BAD$ – линейный угол двугранного угла $B_1 A_1 A D$ ($AB \perp AA_1$, $AD \perp AA_1$); $\angle BAD$ – прямой, значит, и двугранный угол $B_1 A_1 A D$ – прямой.

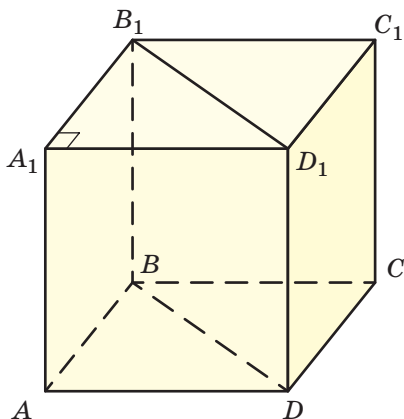


Рис. 3.15

2) $\angle ADB$ – линейный угол двугранного угла B_1D_1DA ($DA \perp DD_1$, $DB \perp DD_1$); $\angle ADB$ – острый, значит, и двугранный угол B_1D_1DA – острый.

Определение 26. Два двугранных угла называются *равными*, если они имеют одну и ту же величину (градусную меру).

Если градусная мера одного из двугранных углов больше градусной меры другого, то говорят, что первый двугранный угол больше второго, а второй

меньше первого. На рис. 3.16 изображены три двугранных угла с общим ребром AB . Двугранные углы $CABD$ и $DABE$ равны, т.к. их величины равны по 30° каждая.

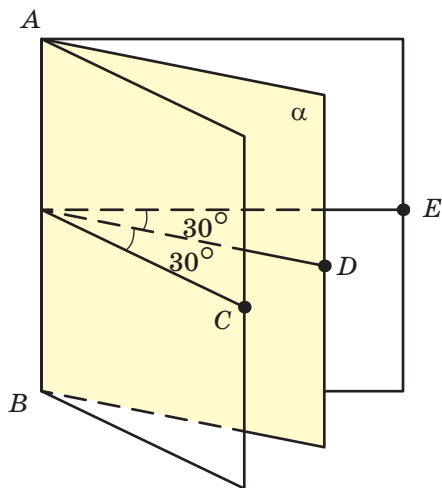


Рис. 3.16

Используя понятие величины двугранного угла, можно доказать, что:

- вертикальные двугранные углы равны;
- сумма величин смежных двугранных углов равна 180° ;
- если два смежных двугранных угла равны между собой, то каждый из них является прямым двугранным углом.

В учебнике геометрии для 7–9-го классов мы рассматривали понятие биссектрисы выпуклого угла на плоскости и изучали свойства этой биссектрисы.

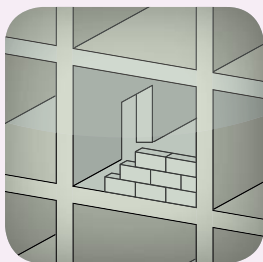
По аналогии для двугранных углов вводится понятие – *биссекторная плоскость*.

Биссектор двугранного угла – это полуплоскость, ребро которой совпадает с ребром двугранного угла и которая делит этот двугранный угол на два равных двугранных угла. На рис. 3.16 полуплоскость α является биссектором двугранного угла $CABE$, и она обладает важным свойством:



Биссекторная плоскость двугранного угла является множеством точек, равноудалённых от граней этого угла.

Докажите это свойство самостоятельно.



ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПЛОСКОСТИ

3.3.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Мы неоднократно говорили, что смежные грани куба или прямоугольного параллелепипеда (например, стены и потолок или стены и пол комнаты) взаимно перпендикулярны. Что это значит?

Как проверить перпендикулярность пола и стен? Пол должен быть горизонтален, а стены ставят вертикально. Вертикальность установки вехи или стены на практике проверяют с помощью отвеса (рис. 2.54 на с. 68). Стена стоит вертикально, если в любом её месте линия нити отвеса будет параллельна плоскости стены. Отвес перпендикулярен поверхности земли, и тогда получается, что вертикально стоящая стена, перпендикулярная горизонтальному полу, как бы заполнена перпендикулярами к этому полу.

Это наблюдение позволяет назвать взаимно перпендикулярными плоскостями такие плоскости, каждая из которых заполнена перпендикулярами к другой плоскости (рис. 3.17).

Но перпендикулярность друг другу двух соседних стен или двух граней бруса отвесом не проверишь. В этом случае на практике используют угольник, прикладывая его так, чтобы стороны угольника шли перпендикулярно углу комнаты или ребру бруса (рис. 3.18).

Всё сказанное подводит нас к пониманию понятия перпендикулярности плоскостей.

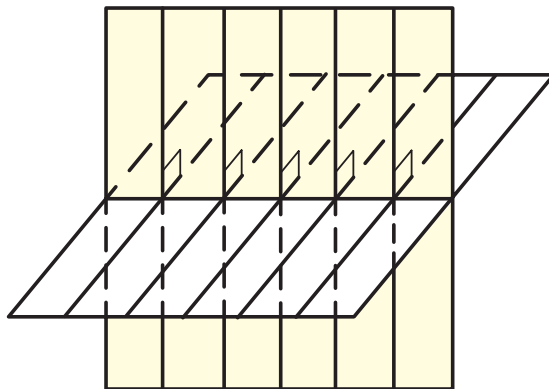


Рис. 3.17

Две пересекающиеся плоскости α и β образуют четыре двугранных угла с общим ребром AB (рис. 3.19). Если один из этих двугранных углов прямой, то другие три угла также являются прямыми. (Объясните, почему.) Можно дать такое определение перпендикулярности плоскостей:

Определение 27. Две пересекающиеся плоскости называются *перпендикулярными* (или *взаимно перпендикулярными*), если они образуют прямые двугранные углы.

Перпендикулярность двух плоскостей α и β обозначается так: $\alpha \perp \beta$; читается: плоскость α перпендикулярна плоскости β или плоскости α и β перпендикулярны.

Мы уже указывали на некоторые примеры использования перпендикулярности плоскостей в окружающей нас действительности, в технике, в повседневной жизни: в перпендикулярных плоскостях расположены смежные грани кирпичей и блоков, перпендикулярные плоскости имеются у многих деталей машин и столярных изделий (рис. 3.20).



Рис. 3.18

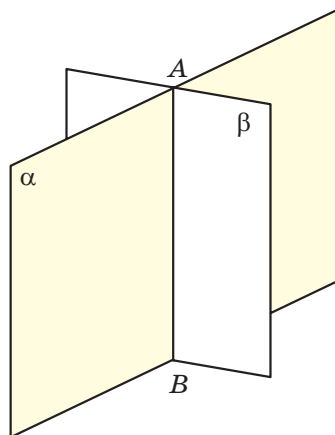


Рис. 3.19

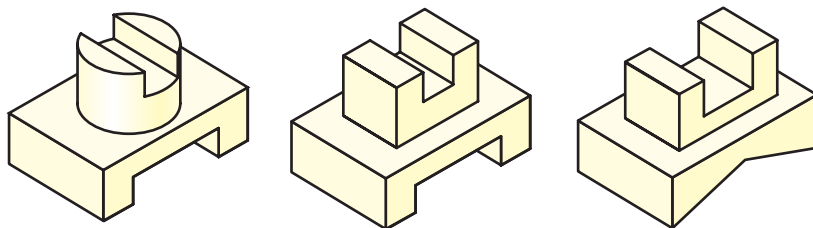


Рис. 3.20

3.3.2 СВОЙСТВА И ПРИЗНАКИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Докажем некоторые свойства взаимно перпендикулярных плоскостей.

Мы умеем строить три прямые a , b и c (рис. 3.21а), любые две из которых взаимно перпендикулярны. Проведём через прямые a и c плоскость α , а через прямые b и c плоскость β (рис. 3.21б). Из того, что $b \perp a$, $b \perp c$, следует, что $b \perp \alpha$ (признак перпендикулярности прямой и плоскости, теорема 8); аналогично $a \perp \beta$.

Таким образом, каждая из двух взаимно перпендикулярных плоскостей содержит перпендикуляр к другой плоскости. Эти перпендикуляры как бы заполняют взаимно перпендикулярные плоскости (рис. 3.21б).

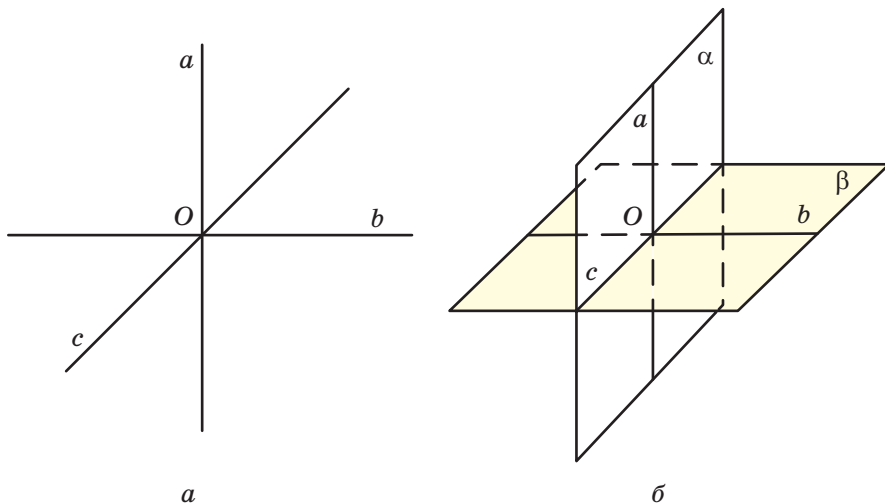


Рис. 3.21

Теорема 26. Прямая, лежащая в одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная их линии пересечения, перпендикулярна другой плоскости.

Доказательство

- | | | |
|---|---|---------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой c. 2. Прямая a лежит в плоскости α и $a \perp c$. 3. $a \perp \beta$ (требуется доказать). 4. Поскольку прямые a и c лежат в одной плоскости α и перпендикулярны, то они пересекаются в некоторой точке O. | } | (дано) (рис. 3.22а) |
|---|---|---------------------|

Нам нужно доказать перпендикулярность прямой a и плоскости β . Как это сделать? Следует вспомнить признак перпендикулярности прямой и

плоскости – теорему 8. У нас $a \perp c$, надо, чтобы a была перпендикулярна ещё одной прямой, проходящей через точку O и лежащей в плоскости β .

5. Проведём через точку O в плоскости β прямую b , перпендикулярную прямой c (построение) (рис. 3.22б).

6. Угол с вершиной в точке O и сторонами b и a – линейный угол двугранного угла с ребром c (1, 2, 3, 5).

7. $a \perp b$ (1, 6).

8(3). $a \perp b$ и $a \perp c$, значит, $a \perp \beta$ (2, 7, Т.8). ■

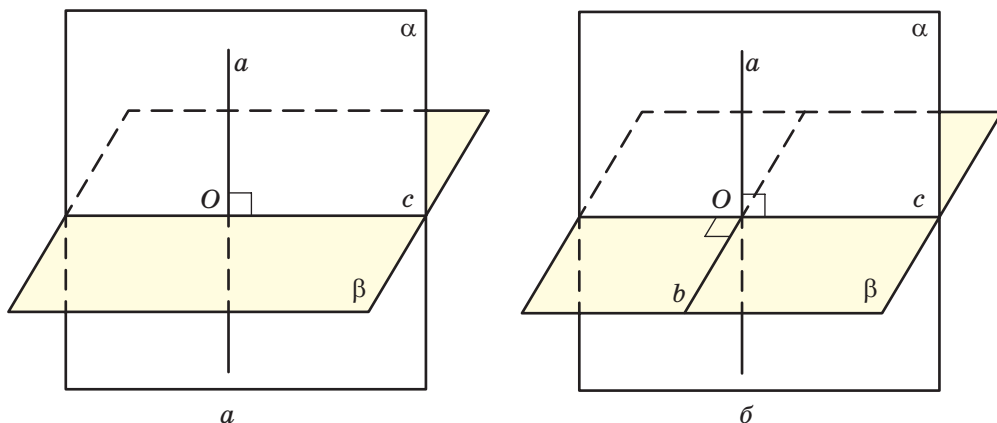


Рис. 3.22

Следующее свойство является утверждением, обратным теореме 26.

Теорема 27. Прямая, имеющая общую точку с одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная другой плоскости, лежит в первой из них.

Докажите это свойство самостоятельно.

Мы можем устанавливать перпендикулярность плоскостей, исходя из определения перпендикулярности. Однако в некоторых ситуациях это бывает не совсем просто. Сейчас мы рассмотрим простой и удобный для применения признак перпендикулярности плоскостей.

Можно заметить, что если раскрытую книгу поставили на крышку стола, то её обложка и страницы, проходящие через прямую AB , будут перпендикулярны плоскости стола α (рис. 3.23). Этот пример подводит нас к формулировке следующего признака перпендикулярности плоскостей:

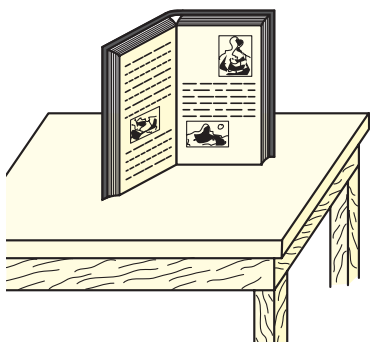


Рис. 3.23

Теорема 28. Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Доказательство

1. Прямая AB лежит в плоскости α .
 2. $AB \perp \beta$, AB пересекает β в точке B .
 3. $\alpha \perp \beta$ (требуется доказать).
- } (дано) (рис. 3.24а)

4. Плоскости α и β имеют общую точку B , а значит, пересекаются по некоторой прямой CD , содержащей точку B (1, 2, 5) (рис. 3.24б).

Нам нужно доказать перпендикулярность плоскостей α и β .

Как это можно сделать? Например, через рассмотрение двугранных углов и градусных мер их линейных углов (они должны быть прямыми). У нас на рисунке нет нужных линейных углов, это подсказывает следующее построение.

5. Проведём в плоскости β прямую MN , перпендикулярную CD и проходящую через точку B (построение) (рис. 3.24в).

6. $BA \perp CD$ и $MN \perp CD$, значит, $\angle BAN$ – линейный угол двугранного угла с ребром CD (2, 5).

7. $AB \perp BN$ (2, определение перпендикуляра к плоскости).

8. $\angle BAN = 90^\circ$ (6, 7).

9. $\alpha \perp \beta$ (4, 8). ■

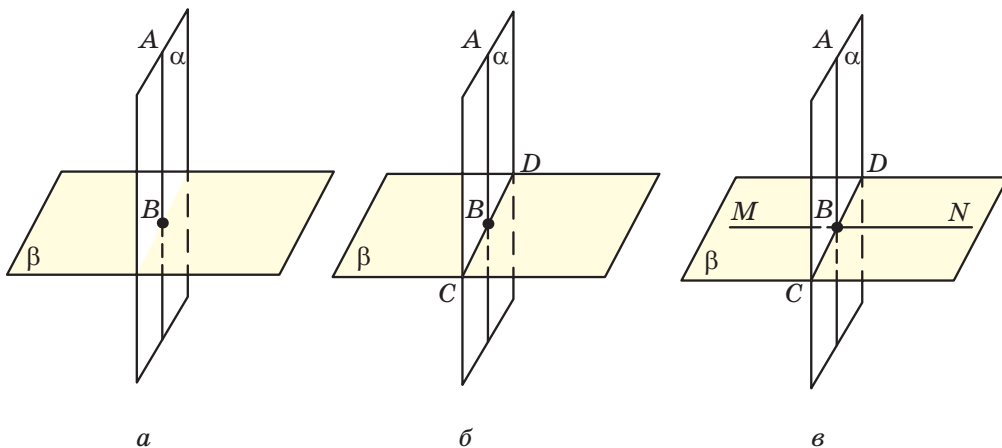


Рис. 3.24

Этот признак имеет, к примеру, такое простое практическое применение: если прямая, проходящая через центры дверных петель, перпендикулярна плоскости пола, то, как бы ни поворачивали дверь, её плоскость будет перпендикулярна плоскости пола (рис. 3.25).

Из теоремы 28 можно получить такое следствие.

Следствие. Плоскость, перпендикулярная прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна каждой из этих плоскостей.

Докажите это следствие самостоятельно.

Например, на рис. 3.26а плоскость γ перпендикулярна прямой a , по которой пересекаются две плоскости – α и β . Значит, согласно следствию, плоскость γ будет перпендикулярна плоскостям α и β .

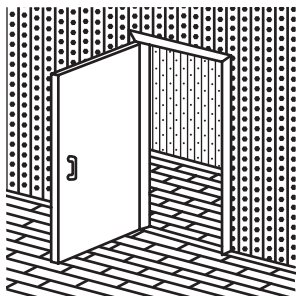
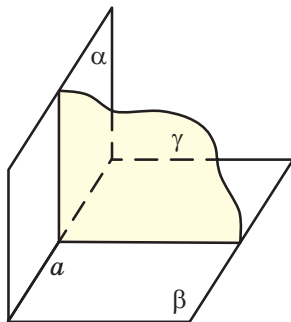
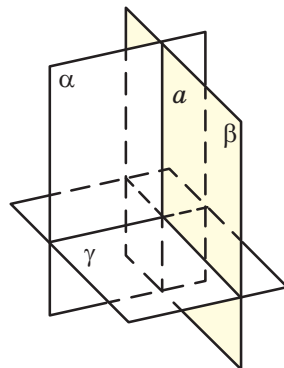


Рис. 3.25



а



б

Рис. 3.26

С помощью свойств перпендикулярных плоскостей можно доказать ещё один признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема 29. Если две плоскости, перпендикулярные третьей плоскости, пересекаются, то прямая их пересечения перпендикулярна третьей плоскости.

Доказательство

1. Плоскости α и β пересекаются по прямой a .
2. Плоскости α и β перпендикулярны плоскости γ .
3. $a \perp \gamma$ (требуется доказать).

} (дано) (рис. 3.26а)

Воспользуемся методом доказательства от противного.

4. Предположим, что прямая a не перпендикулярна плоскости γ (предположение). Возьмём на прямой a любую точку. Через неё проходит прямая, перпендикулярная плоскости γ . Пусть это прямая a_1 .

5. Прямая a_1 лежит и в плоскости α , и в плоскости β (1, 3, Т28), т.е. прямая a_1 является прямой пересечения плоскостей α и β .

6. Но по условию прямой пересечения плоскостей α и β является прямая a (1).

7. Прямая a_1 совпадает с прямой a (1, 5, 4).

8(3). $a \perp \gamma$ (4, 7). ■



ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

3.4.1 ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЛОСКОСТИ И ИХ СВОЙСТВА

Мы знаем, что если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой (аксиома 4). Отсюда следует, что две различные плоскости либо пересекаются по прямой (рис. 3.27а), либо не пересекаются, т.е. не имеют ни одной общей точки (рис. 3.27б).

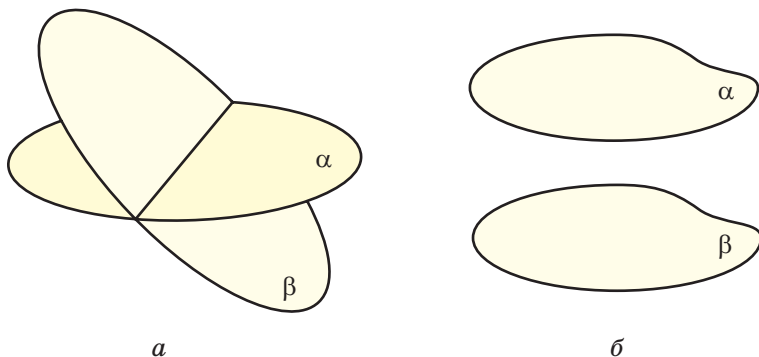


Рис. 3.27

Сформулируем определение параллельности двух плоскостей.

Определение 28. Две плоскости называются *параллельными*, если они не имеют общих точек.

Параллельность плоскостей α и β обозначается так: $\alpha \parallel \beta$. Читается: плоскость α параллельна плоскости β или плоскости α и β параллельны.

Мы изучали двугранные углы, т.е. углы, которые образуются при пересечении плоскостей. Градусная мера угла между параллельными плоско-

стями считается равной нулю. В параллельных плоскостях размещают перекрытия этажей многоэтажных зданий, стекла двойных окон, верхние грани лестничных ступенек.

Параллельны пилы, распиливающие бревно на доски (рис. 3.28), противоположные грани кирпича, швеллера, двутавровой балки (рис. 3.29) и др.

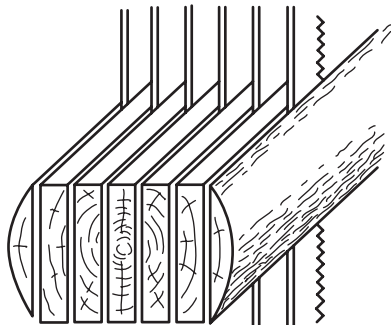


Рис. 3.28

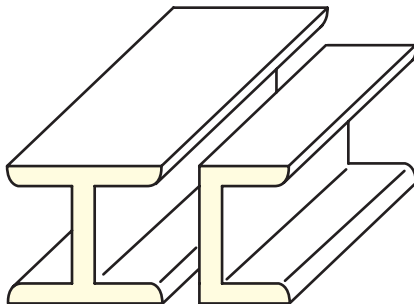


Рис. 3.29

Докажем некоторые свойства параллельных плоскостей.

Теорема 30. Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны (рис. 3.30).

Доказательство

1. α и β , две параллельные плоскости.
 2. Плоскость γ пересекает плоскости α и β по прямым a и b .
 3. $a \parallel b$ (требуется доказать).
- (дано) (рис. 3.30)

Согласно определению, параллельные прямые – это прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются. Наши прямые a и b лежат в одной плоскости – секущей плоскости γ . Они не пересекаются (если предположить, что прямые a и b имеют общую точку, то придётся признать, что эта точка является общей точкой содержащих их параллельных плоскостей α и β). Значит, прямые a и b параллельны. ■

Представляется совершенно очевидным, что если прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую. На рис. 3.31 прямая a пересекает две параллельные плоскости α и β . Вместе с тем в геометрии этот пусть и кажущийся очевидным факт должен быть доказан. (Кстати, его доказательство не так уж и просто – желающие могут попробовать провести его самостоятельно, до знакомства с доказательством теоремы 31).

Теорема 31. Если прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.

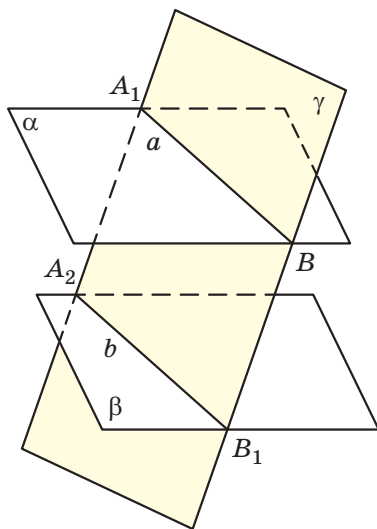


Рис. 3.30

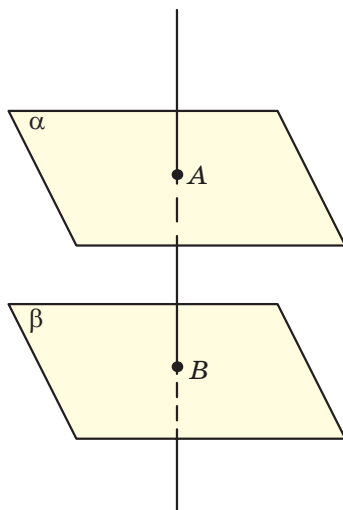


Рис. 3.31

Доказательство

1. Плоскости α и β параллельны и прямая c пересекает плоскость α в точке A (дано) (рис. 3.32а).

2. Прямая c пересекает плоскость β (требуется доказать).

Мы хотим доказать, что прямая c пересекает плоскость β (заметьте, что на рис. 3.32а это пересечение не указано). Как это доказать? Можно построить некоторую плоскость, в которой лежит прямая c и которая пересекает плоскость β .

3. Возьмём любую точку C в плоскости β и проведём плоскость γ через прямую c и точку C (построение) (рис. 3.32б).

4. Плоскость γ пересекает плоскости α и β , так как она имеет с ними общие точки A и C соответственно (1, 3, 4).

5. Прямые a и b , по которым плоскость γ пересекает плоскости α и β , параллельны (4, Т. 30).

6. Прямая c лежит в плоскости γ и пересекает прямую a в точке A (3, 4).

7. Если бы прямая c , лежащая в плоскости γ , не пересекала лежащую в этой же плоскости прямую b , то она была бы параллельна ей, и тогда через точку A проходили бы две прямые (a и c), параллельные прямой b , что противоречит аксиоме параллельных планиметрии. Таким образом, прямая c пересекает прямую b в некоторой точке B (рис. 3.32в).

8. Точка B – общая точка прямой c и плоскости β (7).

9. Прямая c не лежит в плоскости β , так как c проходит через точку A , лежащую в плоскости α (1).

10(2). Прямая c пересекает плоскость β (1, 7, 8). ■

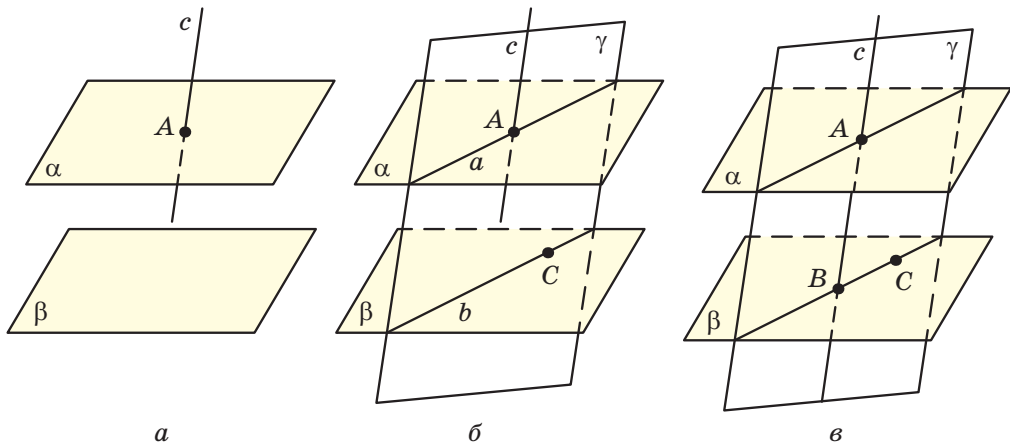


Рис. 3.32

Пусть две параллельные прямые пересекают две параллельные плоскости (рис. 3.33). Что можно сказать о длине отрезков A_1A_2 и B_1B_2 ? Можно предположить, что $A_1A_2 = B_1B_2$. Докажем соответствующую теорему.

Теорема 32. Отрезки параллельных прямых, заключённые между двумя параллельными плоскостями, равны.

Доказательство.

- | | | |
|---|---|--------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. α и β – параллельные плоскости. 2. a и b – параллельные прямые, пересекающие плоскости α и β. 3. A_1, A_2, B_1, B_2 – точки пересечения прямых и плоскостей. 4. $A_1A_2 = B_1B_2$ (требуется доказать). | } | (дано) (рис. 3.33) |
|---|---|--------------------|

Нам нужно доказать равенство двух отрезков. Т.к. эти отрезки параллельны, то было бы хорошо, если бы они были противоположными сторонами параллелограмма. Как получить такой параллелограмм?

5. Проведём через прямые a и b плоскость γ (рис. 3.34) (2, определение параллельных прямых).

6. Плоскость γ пересекает плоскости α и β по параллельным прямым A_1B_1 и A_2B_2 (1, 2, 3, 5, Т. 30).

7. Четырёхугольник $A_1B_1B_2A_2$ – параллелограмм, так как у него противоположные стороны параллельны (2, 6, признак параллелограмма).

8. У параллелограмма $A_1B_1B_2A_2$ противоположные стороны равны (7, свойство параллелограмма).

9(4). Таким образом, $A_1A_2 = B_1B_2$ (8). ■

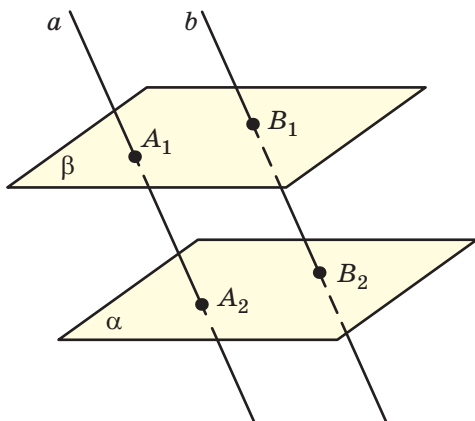


Рис. 3.33

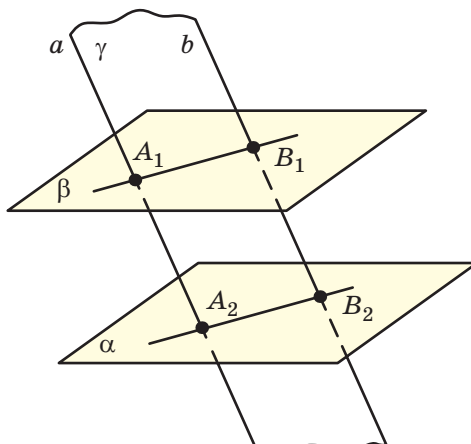


Рис. 3.34

3.4.2 ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

На вопрос о том, являются ли плоскости параллельными, отвечает признак параллельности двух плоскостей.

Теорема 33 (признак параллельности двух плоскостей). Если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Доказательство

1. α и β – две плоскости.

2. a_1 и a_2 – прямые, пересекающиеся в точке A и лежащие в плоскости α .

3. b_1 и b_2 – прямые, параллельные прямым a_1 и a_2 и лежащие в плоскости β ($a_1 \parallel b_1$ и $a_2 \parallel b_2$).

4. $\alpha \parallel \beta$ (требуется доказать).

} (дано) (рис. 3.35)

Воспользуемся методом доказательства от противного.

5. Допустим, что плоскости α и β не параллельны, т.е. пересекаются по некоторой прямой c (предположение) (рис. 3.36).

6. Прямые a_1 и a_2 как параллельные прямым b_1 и b_2 , лежащим в плоскости β , параллельны плоскости β (2, 3, Т. 18).

7. Прямые a_1 и a_2 не пересекают прямой c , лежащей в плоскости β (6, определение прямой, параллельной плоскости).

8. В плоскости α через точку A проходят две прямые a_1 и a_2 , параллельные прямой c (7).

9(4). Пункт 8 противоречит аксиоме параллельных. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана. ■

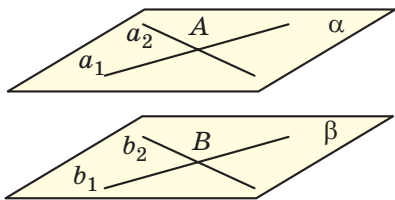


Рис. 3.35

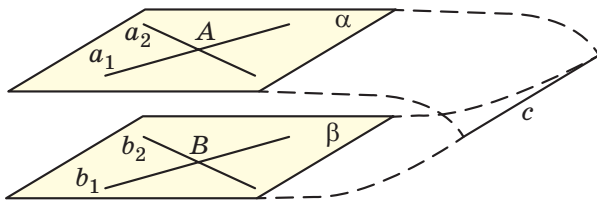


Рис. 3.36

Признак параллельности двух плоскостей позволяет решить вопрос о существовании плоскости, параллельной данной, т.е. строить параллельные плоскости.

Теорема 34. Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.

Доказательство

1. Нам даны плоскость α и точка A вне этой плоскости (дано) (рис. 3.37а).
2. Мы должны построить плоскость β , проходящую через точку A , чтобы $\beta \parallel \alpha$.

Мы можем воспользоваться идеями, заложенными в признаке параллельности плоскостей.

3. Проведём в данной плоскости α какие-нибудь две пересекающиеся прямые a и b (рис. 3.37б) (построение).

4. Через данную точку A проведём прямые $a_1 \parallel a$ и $b_1 \parallel b$ (построение) (рис. 3.37в).

5. Построим плоскость β , проходящую через пересекающиеся прямые a_1 и b_1 (рис. 3.37г) (4, Т. 3).

6. $\alpha \parallel \beta$ (1, 4, 5, Т. 33).

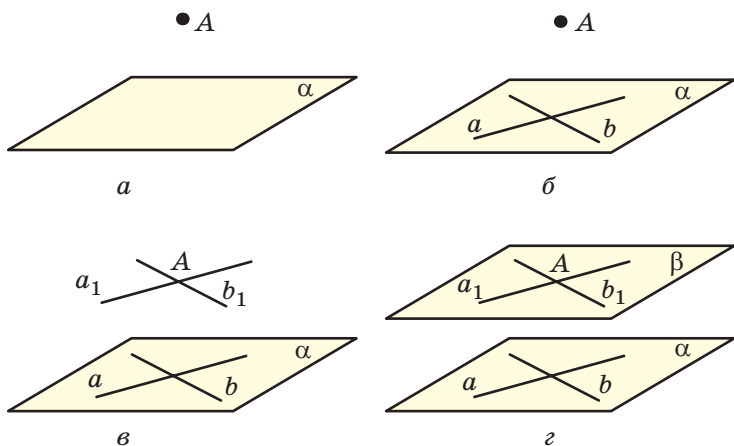


Рис. 3.37

Докажем единственность.

1. Мы построили плоскость β , проходящую через точку A и параллельную плоскости α (рис. 3.38а) (дано).

2. Докажем, что плоскость β единственная (требуется доказать).

Вспользуемся методом доказательства от противного.

3. Допустим, что через точку A проходит другая плоскость β_1 , тоже параллельная плоскости α (предположение) (рис. 3.38б).

Мы хотим доказать, что β_1 пересекает α . Что для этого нужно сделать? Можно, например, показать, что β_1 содержит прямую, которая пересекает α .

4. Отметим в плоскости β_1 какую-нибудь точку C , не принадлежащую плоскости β (построение) (рис. 3.38б).

5. Проведём в плоскости β_1 через точки A и C прямую a (построение) (1, 4) (рис. 3.38б).

6. Прямая a пересекает плоскость β в точке A (рис. 3.38б) (5).

7. Прямая a пересечёт также плоскость α в некоторой точке B (6, Т. 31) (рис. 3.38в).

8. Точка B является общей точкой плоскостей β_1 и α (5, 6, 7).

9. Плоскость β_1 пересекает плоскость α (рис. 3.38в) (8, 4).

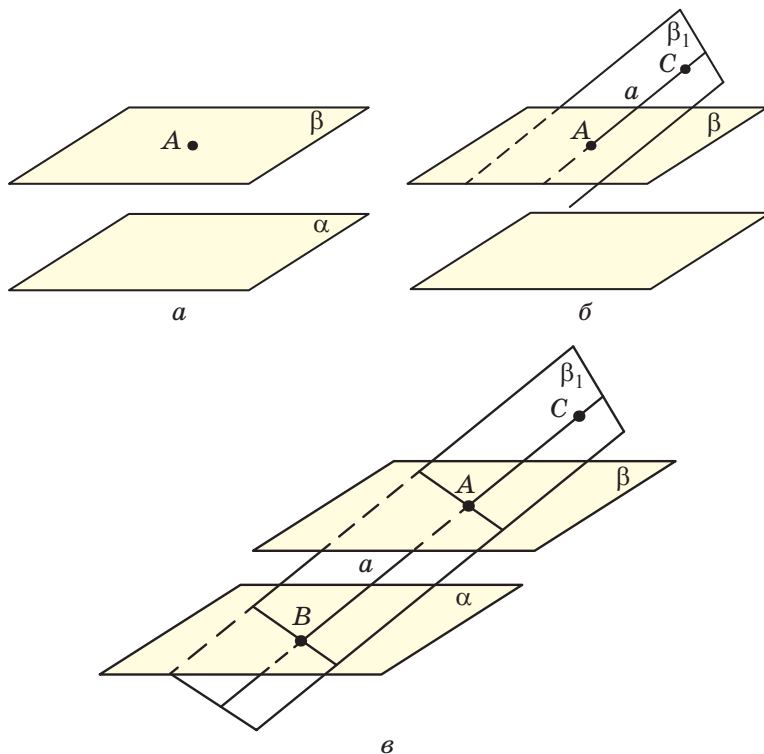


Рис. 3.38

10. Все плоскости, проходящие через точку A и отличные от плоскости β , пересекают плоскость α (9).

Пункт 10 противоречит нашему предположению (п. 3), а значит:

11(2). Плоскость β – единственная. ■

После доказательства этой теоремы можно получить два важных следствия из неё:

Следствие 1. Если плоскость пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую из них.

Доказательство

В противном случае через одну точку проходили бы две плоскости, параллельные одной и той же плоскости, что невозможно по доказанной теореме (Т. 30). ■

Следствие 2. Две различные плоскости, параллельные третьей плоскости, параллельны.

Доказательство

Если две плоскости α и β параллельны плоскости γ , то они не имеют общей точки, так как в противном случае через эту точку M проходят две плоскости, параллельные плоскости γ (рис. 3.39). ■

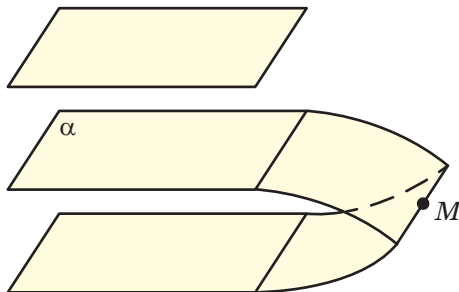


Рис. 3.39

Замечание. Обратите внимание на то, что все определения и теоремы о параллельных плоскостях аналогичны соответствующим определениям и теоремам о параллельных прямым на плоскости. Сопоставьте и сформулируйте эти определения и теоремы.



ПЕРПЕНДИКУЛЯР К ПЛОСКОСТИ И ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

Понятия перпендикуляра к плоскости и параллельности плоскостей тесно связаны между собой. Докажем несколько связанных с этим теорем.

Теорема 35. Если прямая перпендикулярна одной из параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой.

Доказательство

- | | | |
|---|---|---------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\alpha \parallel \beta$. 2. $a \perp \alpha$. 3. $a \perp \beta$ (требуется доказать). | } | (дано) (рис. 3.39а) |
|---|---|---------------------|

Нам надо доказать перпендикулярность прямой a плоскости β , а значит, можно воспользоваться признаком перпендикулярности прямой и плоскости. Для этого нам нужно, чтобы через точку B проходили две пересекающиеся прямые, перпендикулярные прямой a .

Таких прямых у нас нет. Как их построить? Для этого можно пересечь плоскости α и β плоскостями, проходящими через прямую a . Эта идея будет довольно часто использоваться в дальнейшем. Выполним такое дополнительное построение:

4. Через прямую a проведём две произвольные пересекающиеся плоскости ϕ и γ (построение) (рис. 3.39б).

5. Плоскости ϕ и γ пересекают соответственно плоскости α и β по параллельным прямым: AC и BM , AD и BK (4, 5, Т.30).

6. $a \perp AC$, $a \perp AD$ (2,5).

7. $a \perp BM$, $a \perp BK$ (5, свойство перпендикуляра, проведённого к параллельным прямым).

8(3). $a \perp \beta$ (7,Т.8). ■

Доказанная теорема имеет достаточно широко используемое практическое значение. Это применение можно сформулировать так: если мы хотим построить перпендикуляр к данной плоскости, *достаточно провести его к плоскости, параллельной данной*. Например, когда нужно подпереть пото-

лок или перекрытие, упирают столб перпендикулярно полу, и тем самым он оказывается перпендикулярным и потолку.

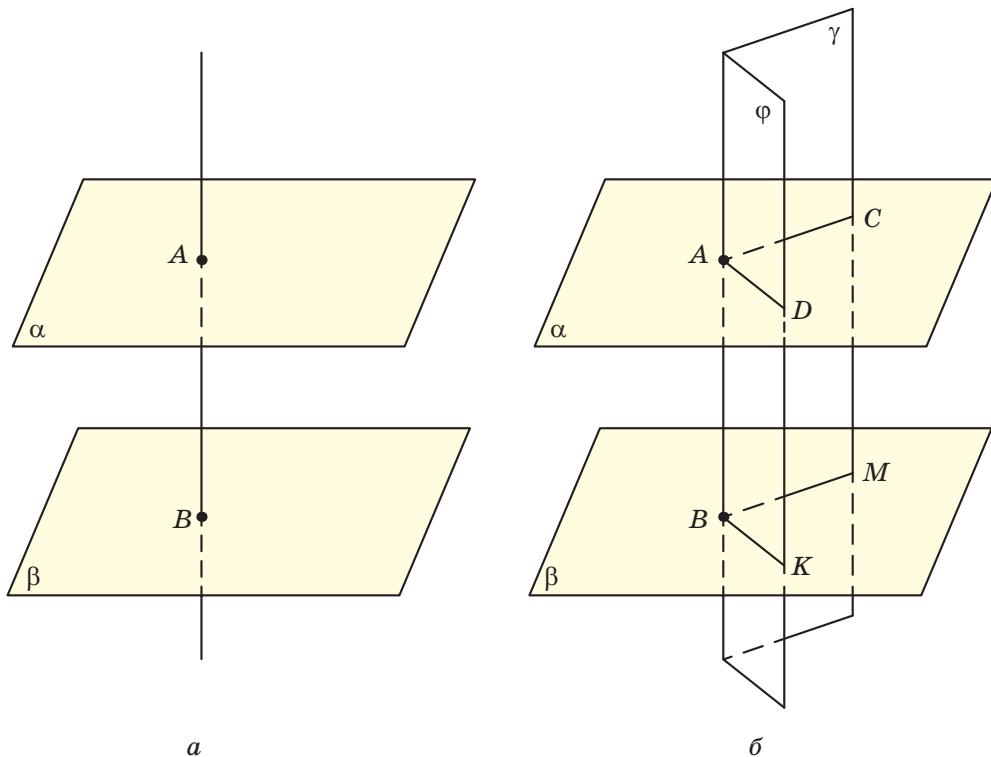


Рис. 3.39

Используя понятие перпендикуляра к плоскости, можно доказать ещё один признак параллельности двух плоскостей.

Теорема 36. Две различные плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.

Доказательство

1. $a \perp \alpha$.
2. $a \perp \beta$.
3. $\alpha \parallel \beta$ (требуется доказать)

} (дано) (рис. 3.40)

4. Предположим от противного, что плоскости α и β пересекаются в некоторой точке O (предположение).

5. Через точку O проходят две плоскости, перпендикулярные одной прямой (1, 2, 4).

6(3). Пункт 5 противоречит теореме 24, а значит, предположение пункта 4 неверно и $\alpha \parallel \beta$. ■

В начале нашего курса мы начали знакомиться с очень важным понятием – *расстояние между точками*.

Сейчас мы можем полностью разобраться с понятием *расстояние между параллельными плоскостями*.

Мы уже изучили свойства перпендикуляра, проведённого к двум параллельным плоскостям. Для двух параллельных плоскостей есть прямая, перпендикулярная им обеим. Её отрезок с концами на этих плоскостях является их общим перпендикуляром. На рис. 3.40а отрезок AB является общим перпендикуляром к плоскостям α и β . Длина этого перпендикуляра называется *расстоянием между плоскостями*.

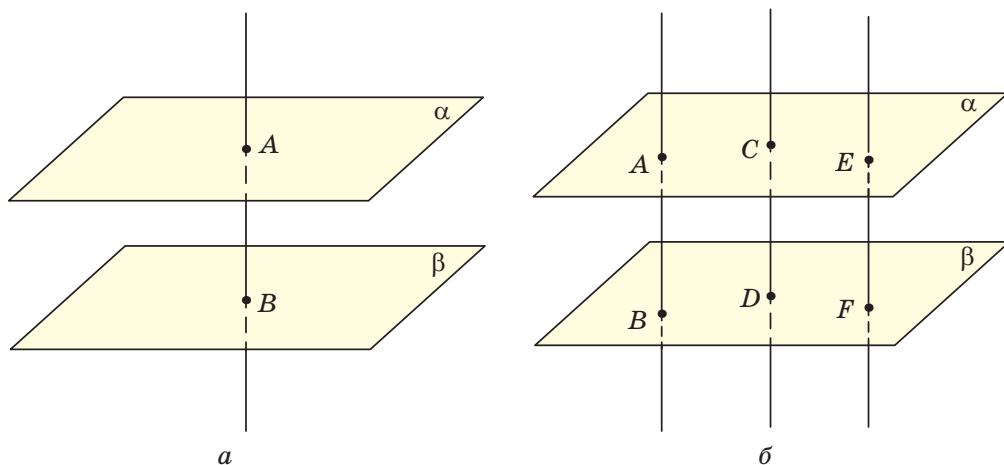


Рис. 3.40

Из теоремы 32 следует, что $AB = CD = EF$. Поэтому все точки каждой из двух параллельных плоскостей находятся на одном и том же расстоянии от другой из этих плоскостей. Это расстояние и есть расстоянием между параллельными плоскостями. Оно равно длине любого общего перпендикуляра этих плоскостей. Эти перпендикуляры заполняют слой между параллельными плоскостями (рис. 3.41).

Мы доказали следующую теорему:

Теорема 37. Параллельные плоскости проходят на постоянном расстоянии друг от друга или одинаково удалены одна от другой.

На практике параллельность плоскостей так и проверяют, измеряя толщину слоя между этими плоскостями.

Параллельные плоскости определяются как плоскости, которые не пересекаются (как бы мы их мысленно ни продолжали). На практике мы имеем дело с конечными частями плоскостей. Параллельность пола и потолка,

двух противоположных стен или междуэтажных перекрытий устанавливается, конечно, не с помощью мысленного их бесконечного продолжения. Мы используем изученные нами свойства, которые относятся к этим конечным частям плоскости. По этим же свойствам производится построение параллельных прямых и плоскостей, а в реальности – их конечных кусков.

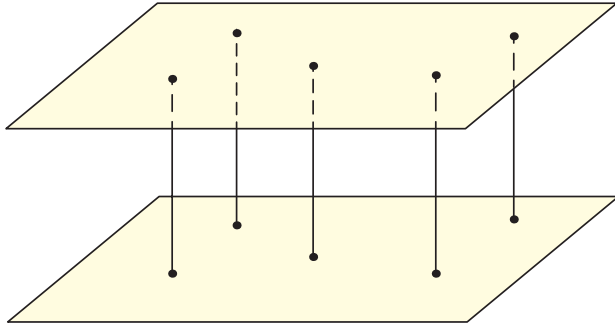


Рис. 3.41

Важнейшим среди свойств, характеризующих параллельность плоскостей, является постоянство расстояния, т.е. равноудалённость точки одной плоскости от другой (теорема 37).

Справедливо и такое утверждение:

Теорема 38. Концы равных перпендикуляров к данной плоскости, расположенные в одном полупространстве относительно неё, лежат в одной плоскости, параллельной данной, и полностью заполняют эту плоскость.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Реальным воплощением отрезков, о которых идёт речь, могут представляться столбы и колонны, стоящие на основании здания и подпирающие параллельное ему перекрытие. На колонны равной высоты опирается верхняя плоскость здания, например греческого храма (рис. 3.42)*. И в современном строительстве сплошь и рядом укладывают междуэтажные перекрытия на вертикальных столбах равной высоты. Их верхние концы оказываются в плоскости, параллельной той, где лежат их основания. Другой пример: полки в книжном шкафу укрепляются на боковых стенках так, что они лежат параллельно.

В заключение можно обратить внимание на ещё одну взаимосвязь параллельности и перпендикулярности.

* Храм Зевса в Олимпии был построен в течение пятнадцати лет греческим архитектором Либом из Элиды и в 456 г. до н.э. был освящён. Храм Зевса долгое время был самым большим храмом на земле Греции.



Рис. 3.42

Всё пространство можно заполнить параллельными друг другу прямыми, перпендикулярными данной плоскости (рис. 3.43). Точно так же пространство заполняется параллельными плоскостями, перпендикулярными заданной прямой (рис. 3.44).

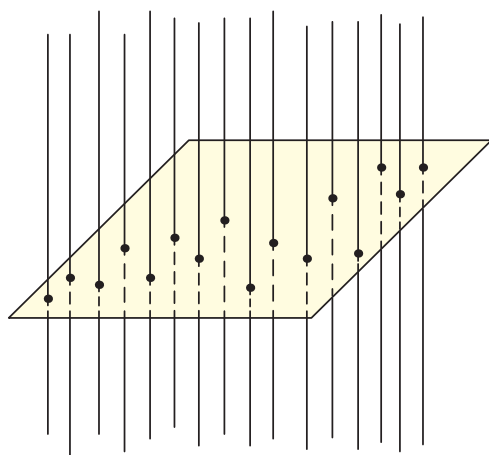


Рис. 3.43

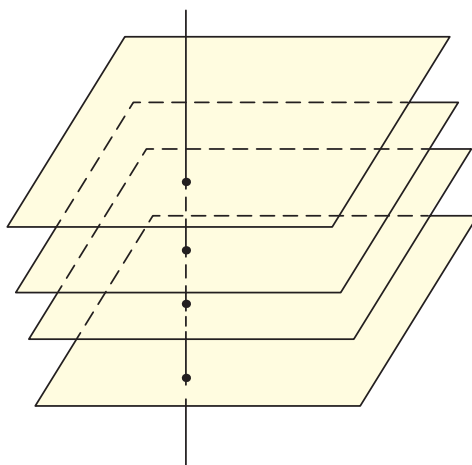
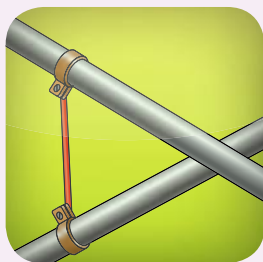


Рис. 3.44



Подумайте над обоснованием этих утверждений.



РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

Вернёмся к рассмотрению одного из наиболее сложных случаев взаимного расположения прямых – к скрещивающимся прямым. Сначала рассмотрим важную теорему, в которой описывается удобный для работы способ расположения скрещивающихся прямых.

Теорема 39. Для любых двух скрещивающихся прямых существуют две параллельные плоскости, одна из которых содержит одну из этих прямых, а другая – другую прямую.

Доказательство

1. Скрещивающиеся прямые a и b (дано) (рис. 3.45а).
2. Мы должны построить такие плоскости α и β , что $\alpha \parallel \beta$, причём $\alpha \supset a$ и $\beta \supset b$.

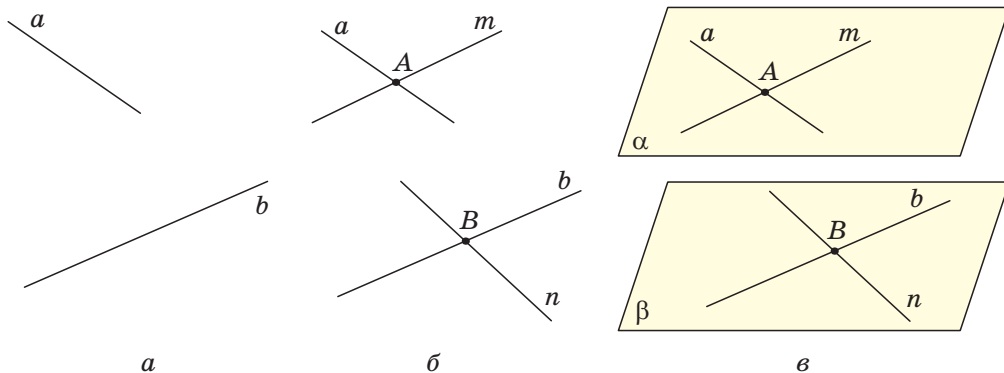


Рис. 3.45

3. Возьмём на прямой a произвольную точку A и проведём через неё прямую m , параллельную прямой b (рис. 3.45б) (построение) (Т.5).

4. Возьмём на прямой b произвольную точку B и проведём через неё прямую n , параллельную прямой a (рис. 3.45б) (построение) (Т.5).

5. Через пересекающиеся (в точке A) прямые a и m проведём плоскость, назовём её α (рис. 3.45в) (построение) (Т.3).

6. Через пересекающиеся (в точке B) прямые b и n проведём плоскость, назовём её β (рис. 3.45в) (построение) (Т.3).

7. Две пересекающиеся прямые (a и m) плоскости α соответственно параллельны двум прямым (b и n) плоскости β ($a \parallel n$, $b \parallel m$). Значит, $\alpha \parallel \beta$ (Т.33).

8. По построению $\alpha \supset a$ и $\beta \supset b$ (5, 6).

9(2). Требуемые плоскости построены (7, 8). ■

Теорема 40. Плоскости в теореме 39 определяются единственным образом.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Определение 29. *Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется перпендикулярный каждой из прямых отрезок, один конец которого лежит на одной прямой, а другой конец – на другой прямой.*

Теорема 41. У любых двух скрещивающихся прямых существуют общий перпендикуляр, причём единственный. Его длина меньше длины любого другого отрезка с концами на скрещивающихся прямых.

Доказательство

1. Скрещивающиеся прямые a и b (дано) (рис. 3.46а).

2. Требуется построить их общий перпендикуляр.

3. Через прямую b проведём плоскость α , параллельную прямой a (построение) (рис. 3.46б).

4. Отметим на прямой a произвольную точку M и опустим из неё перпендикуляр MN на плоскость α (построение) (рис. 3.46в).

5. Через пересекающиеся прямые a и MN проведём плоскость γ (построение) (рис. 3.46г) (1, 4, Т.3).

6. Плоскость γ пересечёт плоскость α по некоторой прямой l , которая параллельна прямой a (Т.21). Пусть O – точка пересечения прямой l с прямой b (рис. 3.46г) (если бы такой точки не было, то прямая l была бы параллельна прямой b , но мы знаем также, что прямая l параллельна прямой a , и тогда по теореме 6 получили бы, что $a \parallel b$, а это противоречит условию) (1).

7. Через точку O в плоскости γ проведём прямую, параллельную прямой MN (построение), пересекающую прямую a в точке O_1 (рис. 3.46д).

8. Отрезок OO_1 параллелен перпендикуляру MN к плоскости α , значит, $OO_1 \perp \alpha$, откуда следует, что $OO_1 \perp b$ и $OO_1 \perp l$. А поскольку $a \parallel l$, то $OO_1 \perp a$.

9(2). Для отрезка OO_1 установлено, что $O_1 \in a$, $O \in b$, $OO_1 \perp a$, $OO_1 \perp b$ (6, 7, 8). Это и значит, что отрезок OO_1 – общий перпендикуляр скрещивающихся прямых a и b .

Итак, существование общего перпендикуляра доказано. Докажем его единственность.

10. Предположим, что у скрещивающихся прямых a и b имеется ещё один общий перпендикуляр (предположение), т.е. такой отрезок AB , что $A \in a$, $B \in b$, $AB \perp a$, $AB \perp b$ (рис. 3.46е).

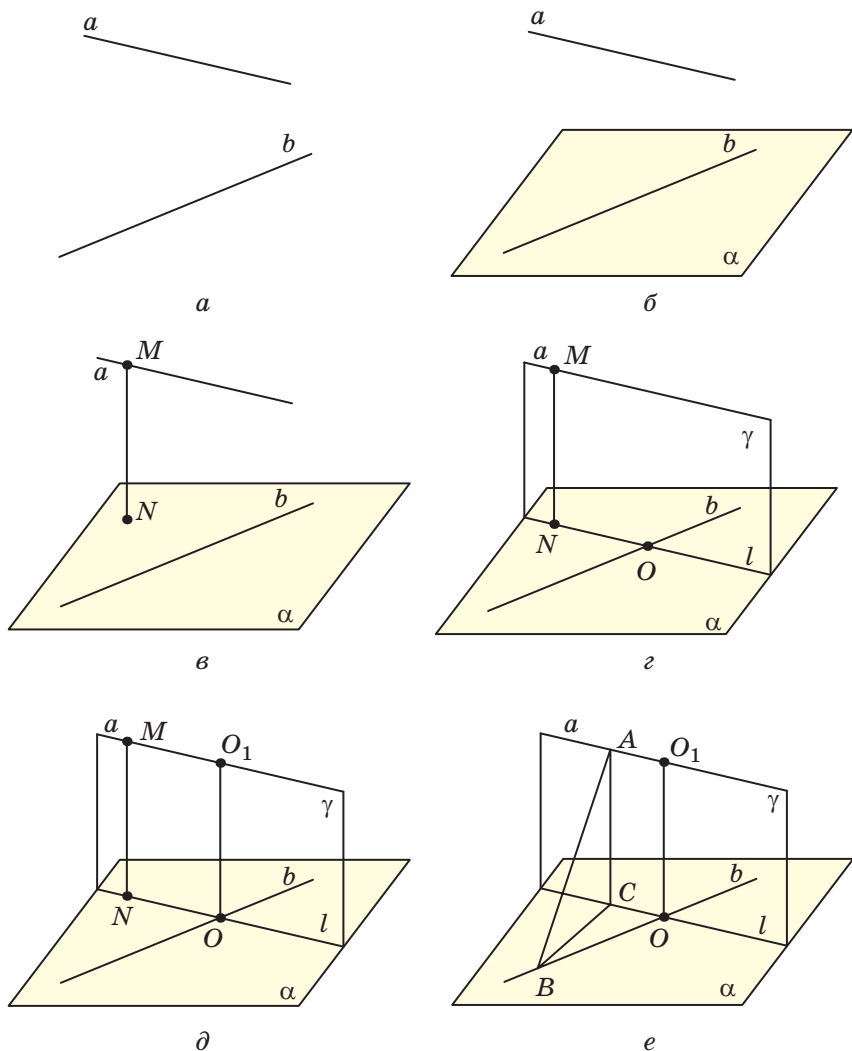


Рис. 3.46

11. Через точку A в плоскости γ проведём прямую, параллельную прямой OO_1 (построение), пересекающую прямую a в точке C (рис. 3.46е). Т.к. AC параллельна OO_1 – общему перпендикуляру скрещивающихся прямых a и b , то $AC \perp a$, $AC \perp b$.

12. Проведём через пересекающиеся прямые AB и AC плоскость ABC (ТЗ). Т.к. каждая из прямых a и b перпендикулярна и AB , и AC , то каждая из прямых a и b перпендикулярна плоскости ABC (Т.8). Отсюда по теореме 11 заключаем, что $a \parallel b$, а это противоречит условию теоремы. Таким образом, единственность общего перпендикуляра скрещивающихся прямых доказана.

13. Докажем наконец, что длина общего перпендикуляра OO_1 меньше длины любого другого отрезка с концами на скрещивающихся прямых. Рассмотрим любой отрезок AB , у которого $A \in a$, $B \in b$ (рис. 3.46е).

14. Через точку A в плоскости γ проведём прямую, параллельную прямой OO_1 (построение), пересекающую прямую a в точке C (рис. 3.46е). Т.к. $AC \parallel OO_1$, то $AC \perp a$ и $AC = OO_1$. Получается, что из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AC и наклонная AB , поэтому $AC < AB$, а т.к. $AC = OO_1$, то $OO_1 < AB$, что и требовалось доказать.

15. Теорема полностью доказана. ■

Дадим теперь определение расстояния между скрещивающимися прямыми.

Определение 30. Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра.

Хотя в доказательстве теоремы 41 описано, как можно построить общий перпендикуляр скрещивающихся прямых, отметим, что его построение при нахождении расстояния между ними почти никогда не выполняется. Дело в том, что в большинстве случаев расстояние между скрещивающимися прямыми можно найти гораздо быстрее и проще, чем построив их общий перпендикуляр.

Для начала заметим, что расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, одна из которых содержит одну из этих прямых, а другая – другую прямую (такие плоскости существуют по теореме 39). Действительно, общий перпендикуляр скрещивающихся прямых перпендикулярен каждой из плоскостей, а значит, его длина равна расстоянию между ними.

Например, если взять в грани $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ произвольный отрезок EF , а в грани $A_1 B_1 C_1 D_1$ – произвольный отрезок MK так, что прямые EF и MK – скрещивающиеся (рис. 3.47), то расстояние между этими прямыми будет равно длине ребра AA_1 .

Чаще всего расстояние между скрещивающимися прямыми ищут одним из двух следующих методов:

1. (Метод параллельной плоскости). Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от любой точки одной из прямых до параллельной ей плоскости, проведённой через другую прямую.

Обоснование этого метода, по сути, содержится в доказательстве теоремы 41 (упомянутой плоскостью является рассмотренная в этом доказательстве плоскость α).

2. (Метод проектирования). Если имеется плоскость, перпендикулярная одной из двух скрещивающихся прямых, то расстояние между этими прямыми равно расстоянию в этой плоскости от их общей точки до проекции на эту плоскость другой прямой.

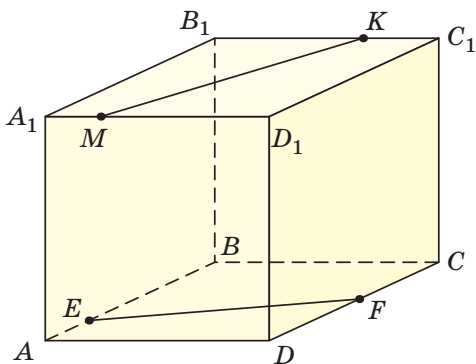


Рис. 3.47

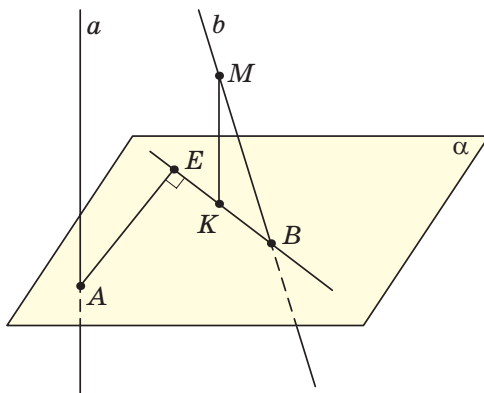


Рис. 3.48

На рис. 3.48 прямая a перпендикулярна плоскости α , причём A — их общая точка. Прямая b , скрещивающаяся с прямой a , пересекает плоскость α в точке B . Возьмём на прямой b точку M , отличную от точки B , и проведём из неё перпендикуляр MK к плоскости α . Тогда прямая BK — проекция прямой на плоскость α . Проведём в плоскости α из точки A к прямой BK перпендикуляр AE . Утверждается, что расстояние между скрещивающимися прямыми a и b равно длине отрезка AE . Для обоснования этого утверждения достаточно заметить, что прямая a параллельна плоскости MBK (т.к. $a \parallel MK$), и сослаться на метод параллельной плоскости.

Продemonстрируем оба метода на конкретных примерах.

ЗАДАЧА 1

В кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ точка E — середина ребра $ABCD$. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми BD и EC_1 , если ребро куба равно 4 (рис. 3.49а).

Решение

Рассмотрим плоскость AA_1C_1C (рис. 3.49б). Прямая BD перпендикулярна этой плоскости, т.к. она перпендикулярна двум её пересекающимся прямым AC (диагонали квадрата $ABCD$) и AA_1 (поскольку BD лежит в плоскости $ABCD$, перпендикулярной AA_1).

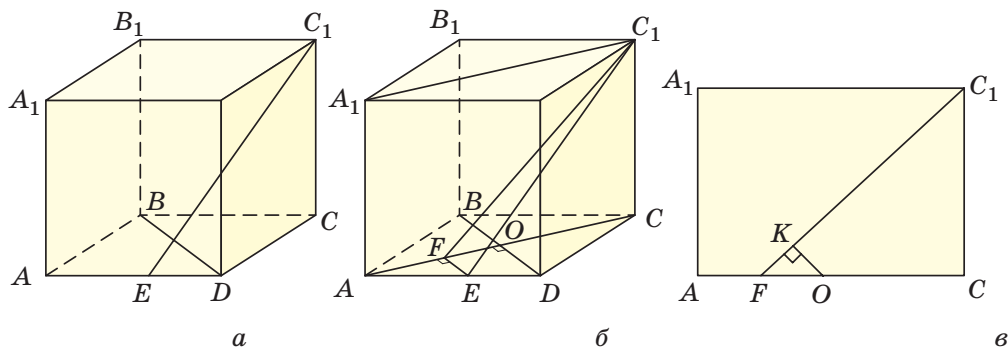


Рис. 3.49

В соответствии с методом проектирования искомое расстояние между скрещивающимися прямыми BD и EC_1 равно расстоянию в плоскости AA_1C_1C от точки O до проекции на эту плоскость прямой EC_1 . Но т.к. проекцией на эту плоскость точки D является точка O , то проекцией точки E (середины отрезка AD) будет точка F (середина отрезка AO) (рис. 3.49б).

Таким образом, в прямоугольнике AA_1C_1C со сторонами $AA_1 = 4$ и $AC = 4\sqrt{2}$ нужно найти расстояние OK от точки O до прямой FC_1 , где O – середина AC , а F – середина AO (рис. 3.49в). Но из прямоугольного треугольника FOK имеем: $OK = FO \cdot \sin \angle C_1FC$, а из прямоугольного треугольника C_1FC $\sin \angle C_1FC = \frac{C_1C}{C_1F}$, откуда $OK = \frac{FO \cdot CC_1}{C_1F}$ (заметим, что это соотношение можно было получить также из подобия прямоугольных треугольников FOK и C_1FC). Но $FO = \sqrt{2}$, $FC = 3\sqrt{2}$, а по теореме Пифагора (из прямоугольного треугольника C_1FC) $C_1F^2 = CF^2 + C_1C^2 = (3\sqrt{2})^2 + 4^2 = 34$, откуда $C_1F = \sqrt{34}$, поэтому $OK = \frac{\sqrt{2} \cdot 4}{\sqrt{34}} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$. ■

ЗАДАЧА 2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние между скрещивающимися прямыми AD_1 и DC_1 , если $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 3$ (рис. 3.50, а).

Решение

Проведём отрезок AB_1 . Он параллелен отрезку DC_1 , значит, плоскость AB_1D_1 параллельна прямой DC_1 (рис. 3.50б). Искомое расстояние между скрещивающимися прямыми AD_1 и DC_1 равно расстоянию от любой точки прямой DC_1 до плоскости AB_1D_1 . Теперь нужно выбрать на прямой DC_1 такую точку, из которой было бы удобно проводить перпендикуляр к плоскости AB_1D_1 . Убедимся, что такой точкой является точка C_1 . Проведём плоскость C_1A_1AC . Прямая B_1D_1 перпендикулярна этой плоскости, т.к. она перпендикулярна двум её пересекающимся прямым A_1C_1 (диагонали квадрата $A_1B_1C_1D_1$) и AA_1 (поскольку B_1D_1 лежит в плоскости $A_1B_1C_1D_1$, перпендикулярной AA_1). Т.к. плоскость AB_1D_1 проходит через прямую B_1D_1 , то по теореме 28 плоскости AB_1D_1 и C_1A_1AC перпендикулярны. А поскольку точка C_1 лежит в плоскости, то перпендикуляр, проведённый из точки C_1 к плоскости

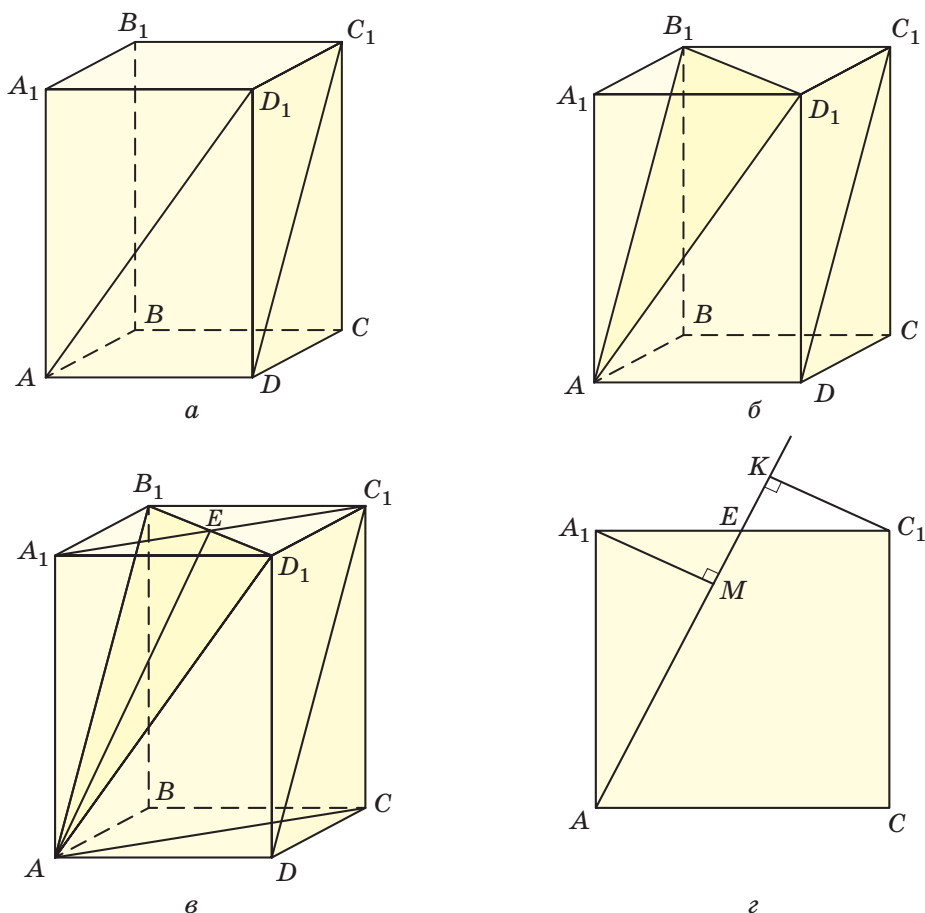


Рис. 3.50

AB_1D_1 , полностью лежит в плоскости C_1A_1AC , а его основание принадлежит прямой пересечения этих плоскостей, т.е. прямой AE (рис. 3.50в).

Таким образом, в прямоугольнике C_1A_1AC со сторонами $AC = 2\sqrt{2}$ и $AA_1 = 3$ проведена прямая AE , где E – середина стороны A_1C_1 , и нужно найти длину перпендикуляра C_1K , проведённого из точки C_1 к прямой AE (рис. 3.50г). Это можно сделать непосредственно, а можно заметить, что треугольники C_1KE и A_1ME равны по гипотенузе и острому углу, и искать длину отрезка A_1M . Но это высота, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника A_1AE с катетами $EA_1 = \sqrt{2}$ и $AA_1 = 3$. По теореме Пифагора, гипотенуза AE равна $\sqrt{11}$, и, записав равенство двух выражений для площади треугольника A_1AE в виде $\frac{1}{2} \cdot AE \cdot A_1M = \frac{1}{2} \cdot A_1E \cdot A_1A$, находим, что $A_1M = \frac{A_1E \cdot A_1A}{AE} = \frac{\sqrt{2} \cdot 3}{\sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{22}}{11}$. ■

РАЗВИВАЕМ УМЕНИЯ

ЗАДАЧИ К § 3.1

Н



- 1** На рис. 3.51 изображены две пересекающиеся плоскости – α и β . Назовите точки, принадлежащие обеим этим плоскостям.
- 2** Продолжите предложения, чтобы утверждения были верными:
 - а) если две различные прямые пересекаются, то множеством их общих точек является ... ;
 - б) если две различные плоскости пересекаются, то множеством их общих точек является
- 3** Прямая a параллельна линии пересечения плоскостей α и β . Каково взаимное расположение прямой a и плоскости α , прямой a и плоскости β ?

Н



- 4** Сколько общих точек должны иметь две плоскости, чтобы их можно было считать пересекающимися?
- 5** Сколько различных плоскостей можно провести через:
 - а) данную точку; б) две данные точки; в) три данные точки?
- 6** Сколько различных взаимно пересекающихся плоскостей проходит через одну из вершин куба, если каждая из этих плоскостей содержит не менее трёх вершин куба?
- 7** Две пересекающиеся плоскости пересечены третьей плоскостью. Могут ли линии пересечения этих плоскостей быть: а) параллельными; б) непараллельными; в) непересекающимися и непараллельными?

- 8** Плоскости α и β пересекаются по прямой KD . Через точку B , принадлежащую прямой KD , проведена прямая AB , перпендикулярная плоскости α . Точка L принадлежит плоскости α , а точка C – плоскости β (рис. 3.52).

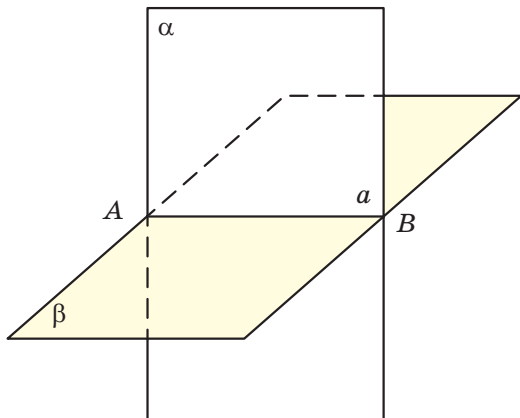


Рис. 3.51

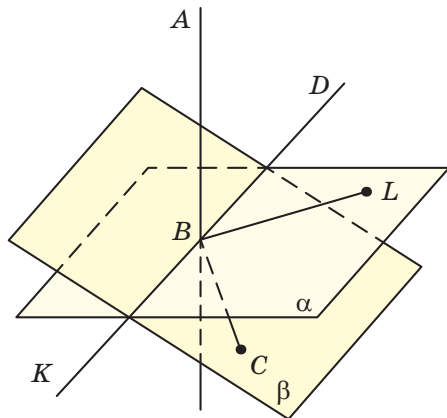


Рис. 3.52

Ответьте на вопросы:

- Верно ли, что $AB \perp BL$? Обоснуйте свой ответ.
- Верно ли, что $AB \perp BC$? Обоснуйте свой ответ.
- Верно ли, что $AB \perp KD$? Обоснуйте свой ответ.

Н

- Докажите, что если прямая параллельна каждой из пересекающихся плоскостей, то она параллельна линии их пересечения.
- Докажите, что если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекается с этой плоскостью, то прямая их пересечения параллельна данной прямой.
- Прямая a пересекает плоскость α в точке M , точка N не принадлежит прямой a . Проведите линию пересечения плоскости α с плоскостью, проходящей через прямую a и точку N .
- Прямые BC и BD лежат в плоскости α ; через точку B проведены плоскость β , перпендикулярная прямой BD и плоскость γ , перпендикулярная прямой BC ; плоскости γ и β пересекаются по прямой AB (рис. 3.53). Докажите, что прямая AB перпендикулярна плоскости α .

13 Докажите, что две прямые, соответственно перпендикулярные пересекающимся плоскостям, или скрещиваются, или пересекаются.

14 Известно, что точка C принадлежит прямой AB , точка D не принадлежит прямой AB , точка M принадлежит прямой AD , причём M отлична от D . Докажите, что плоскости ABD и CDM совпадают.

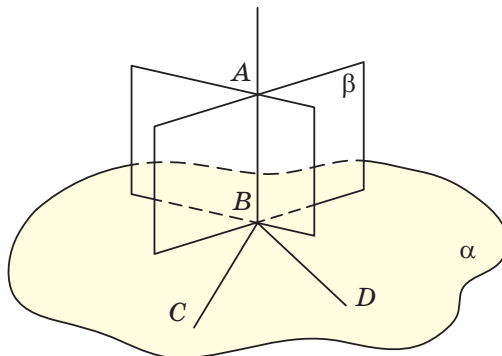


Рис. 3.53

15 Плоскости α и β пересекаются по прямой m , точка A принадлежит плоскости α , точка B принадлежит прямой m , причём A отлична от B . Верны ли утверждения:

- а) прямая AB лежит в плоскости α ;
- б) прямая AB не лежит в плоскости β ?

16 В плоскости α даны различные прямые a и b . Точка M не принадлежит плоскости α . Изобразите линию пересечения плоскостей, одна из которых проходит через a и M , а другая – через b и M .

17 Даны угол ABC и точка M , лежащая вне плоскости этого угла. Изобразите линию пересечения плоскостей, одна из которых проходит через прямую AB и точку M , а другая – через прямую BC и точку M .

П

18 Дан треугольник ABC и точка M , не принадлежащая его плоскости. Через точки M и A проведите плоскость α так, чтобы линия пересечения плоскостей ABC и α : а) разделила отрезок BC пополам; б) разделила угол BAC пополам.

19 Даны угол ABC , точка M , не принадлежащая плоскости ABC , точка P , принадлежащая лучу BC . Через точки M и P проведите плоскость α так, чтобы линия пересечения плоскостей ABC и α отсекала на сторонах данного угла равные отрезки.

ЗАДАЧИ К § 3.2

Н



20 Как называют угол между двумя пересекающимися плоскостями? Сколько таких углов получится при пересечении двух плоскостей?

- 21** Назовите двугранные углы, которые имеются на рисунке 3.54.
- 22** Укажите модели двугранных углов на предметах окружающей обстановки.
- 23** Покажите в классе модель прямого двугранного угла. Что моделирует его линейный угол?
- 24** В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 3.55) укажите какой-нибудь линейный угол двугранного угла: а) $BADD_1$; б) $A_1 B_1 C_1 C$.

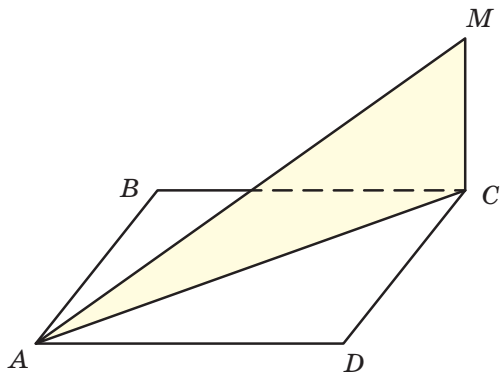


Рис. 3.54

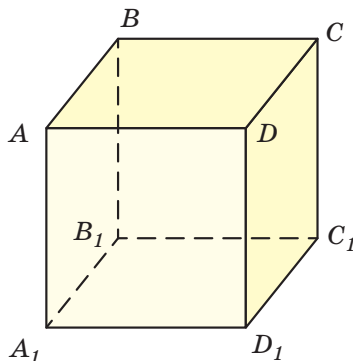


Рис. 3.55

Н



- 25** а) Можно ли считать линейным углом двугранного угла угол, стороны которого – произвольные два луча, проведённые в гранях двугранного угла из одной точки ребра?
 б) Равен ли линейному углу двугранного угла угол между двумя лучами, перпендикулярными его ребру и лежащими в его гранях?
- 26** Как построить линейный угол двугранного угла?
- 27** В треугольной пирамиде $ABCD$ длины всех рёбер равны, точка M – середина ребра AC . Является ли:
 а) угол ABC линейным углом двугранного угла BD ;
 б) угол DMB линейным углом двугранного угла AC ?
 Обоснуйте свой ответ.
- 28** Луч AP перпендикулярен каждому из лучей AK , AM , AS , AR и AT (рис. 3.56). Сколько плоскостей определяется этими лучами? Есть ли на этом рисунке среди отмеченных точек больше трёх, лежащих в одной плоскости? Если да, то почему? (Предполагается, что никакие три из заданных точек не лежат на одной прямой.) Сколько двугранных углов можно назвать на этом рисунке?

- 29** Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Рассмотрите двугранный угол с ребром AB и гранями, проходящими через точки D и D_1 (рис. 3.57). Найдите величины $\angle DAD_1$ и $\angle DBD_1$. Какой из этих углов служит линейным углом данного двугранного угла?

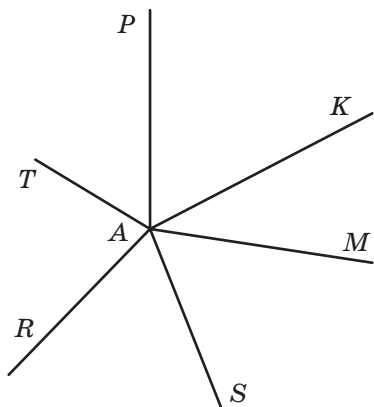


Рис. 3.56

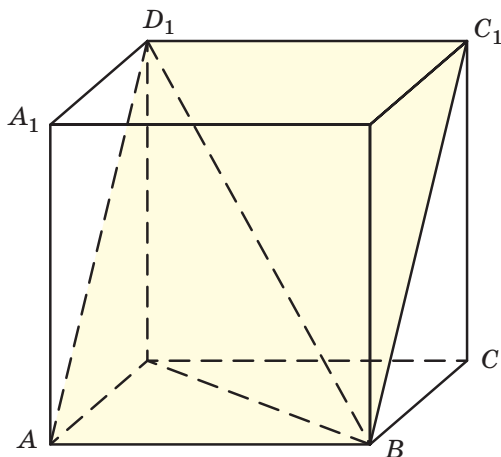


Рис. 3.57

- 30** Изобразите острый, прямой и тупой двугранные углы. Постройте линейные углы этих двугранных углов.
- 31** Известно, что плоскости α и β пересекаются по прямой PK , точка A принадлежит плоскости α и не принадлежит прямой PK , $AB \perp PK$, точка B принадлежит прямой PK , $AC \perp \beta$, C не принадлежит прямой PK . Докажите, что $\angle ABC$ — линейный угол двугранного угла $\alpha PK \beta$.
- 32** В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите величины углов между плоскостями:
а) ABC и $A_1 B_1 C$; б) $A_1 B_1 C$ и $AD_1 C_1$.
- 33** Найдите угол β заострения резца по размерам, указанным на рис. 3.58 (размеры на рисунке указаны в миллиметрах).
- 34** Эскалатор в наклонной части имеет 170 ступенек. Ширина ступеньки 40 см, а высота 20 см. Вычислите: а) глубину подземной станции; б) длину спуска; в) угол наклона лестницы к горизонтальной плоскости пола станции.
- 35** Вычислите толщину каменноугольного пласта, граничные плоскости которого наклонены под углом $\varphi = 34^\circ 40'$ к плоскости горизонта, если при вертикальном бурении установлено, что глубина пласта $b = 4,4$ м (рис. 3.59).

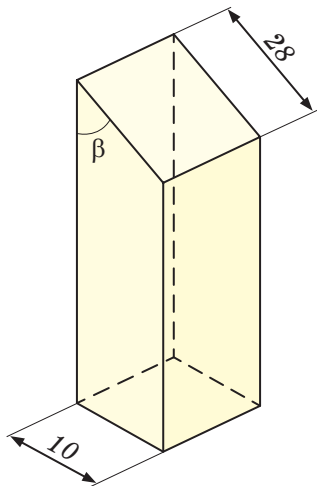


Рис. 3.58

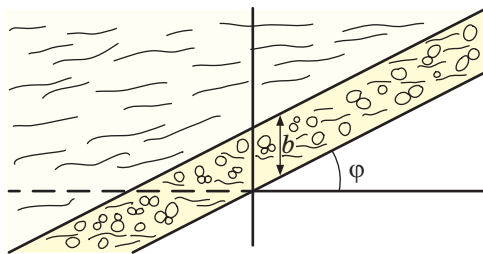


Рис. 3.59

- 36** Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC лежит в плоскости α , проведённой под углом 60° к плоскости данного треугольника. Найдите расстояние от вершины C до плоскости α , если длины катетов данного треугольника 15 см и 17 см.

П

- 37** В плоскости дан четырёхугольник $ABCD$, у которого $AB = 5$, $BC = 7$, $CD = 8$. Вне плоскости $ABCD$ взята такая точка E , что двугранные углы $EABC$, $EBCD$, $ECDA$, и $EADB$ равны. Найдите длину отрезка AD .
- 38** Вне плоскости равностороннего треугольника ABC взята точка E , находящаяся на расстоянии h от плоскости этого треугольника. Известно, что величина каждого из двугранных углов $EABC$, $EBCA$, $ECAB$ равна α . Найдите площадь треугольника ABC . Рассмотрите все возможные случаи.
- 39** Две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью. Докажите равенство величин двугранных углов: а) накрест лежащих; б) соответственных.
- 40** а) Через данную прямую a , лежащую в плоскости α , проведите плоскость β так, чтобы угол между плоскостями α и β имел данную величину.
б) Через точку A , не принадлежащую данной плоскости α , проведите плоскость β так, чтобы угол между плоскостями α и β имел данную величину.
- 41** Из точек A и B , принадлежащих одной из граней двугранного угла, проведены перпендикуляры AA_1 и BB_1 на плоскость другой грани и перпендикуляры AA_2 и BB_2 на ребро. Найдите:
а) BB_2 , если $AA_1 = 15$ см, $BB_1 = 27$ см, $AA_2 = 20$ см;
б) AA_1 и BB_1 , если $A_1A_2 = m$, $B_1B_2 = n$, $AA_1 + BB_1 = p$.
- 42** Проекция прямой на плоскость одной из граней двугранного угла перпендикулярна его ребру. Докажите, что проекция этой прямой на плоскость другой грани также перпендикулярна ребру.

- 43** Несовпадающие точки A и B являются проекциями точки M на плоскости граней двугранного угла. Докажите, что прямая AB перпендикулярна к его ребру.
- 44** Точки A и B принадлежат различным граням двугранного угла и одинаково удалены от его ребра. Найдите на ребре такую точку M , чтобы угол AMB был наибольшим.
- 45** Докажите, что угол между плоскостями равен углу между перпендикулярами этим плоскостям прямыми.

ЗАДАЧИ К § 3.3



- 46** В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 3.60) назовите все пары взаимно перпендикулярных граней.
- 47** В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 3.61) проведено сечение через рёбра AA_1 и CC_1 , а также через рёбра BB_1 и DD_1 . Каким плоскостям на рис. 3.61 перпендикулярно первое из этих сечений и каким второе?

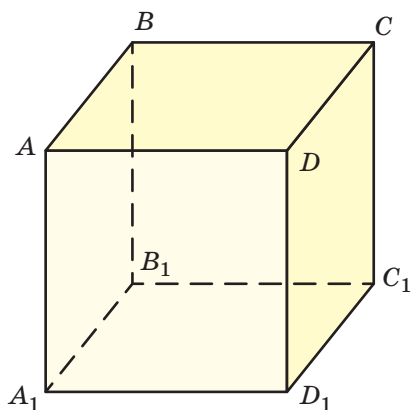


Рис. 3.60

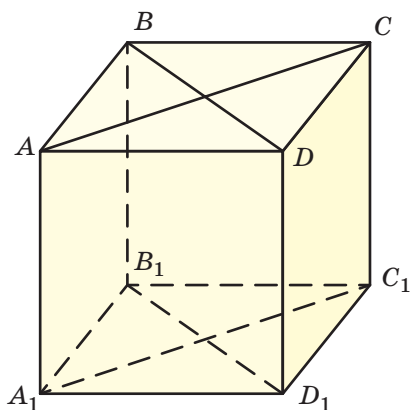


Рис. 3.61



- 48** Верно ли утверждение: «Если две плоскости взаимно перпендикулярны, то любая прямая, лежащая в одной плоскости, перпендикулярна любой прямой другой плоскости»?

- 49** Что нужно знать о двух пересекающихся плоскостях, чтобы утверждать, что они перпендикулярны?
- 50** Сколько пар перпендикулярных плоскостей можно провести через данную прямую?
- 51** Сколько пар перпендикулярных плоскостей можно провести так, чтобы каждая из них содержала одну из двух данных параллельных прямых?
- 52** Можно ли через прямую a , перпендикулярную плоскости α , провести плоскость, не перпендикулярную α ?
- 53** Верно ли, что плоскость, перпендикулярная одной из двух параллельных плоскостей, перпендикулярна и другой?
- 54** Верно ли, что две плоскости, перпендикулярные третьей плоскости, параллельны?

Н

- 55** Плоскости β и γ пересекаются по прямой AB , $\beta \perp \alpha$ и $\gamma \perp \alpha$. Кроме этого, прямая a принадлежит плоскости α (рис. 3.62). Докажите, что прямая AB перпендикулярна прямой a .
- 56** Известно, что $\angle ABC = \angle BCD$, прямая AB перпендикулярна плоскости α (рис. 3.63). Докажите, что: а) прямая CD перпендикулярна плоскости ABC ; б) плоскость α перпендикулярна плоскости ABC .

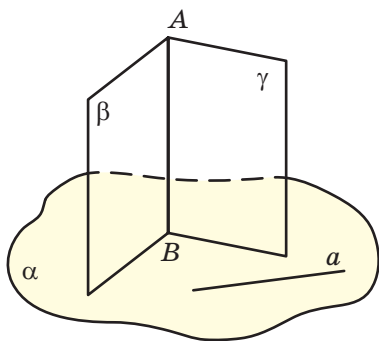


Рис. 3.62

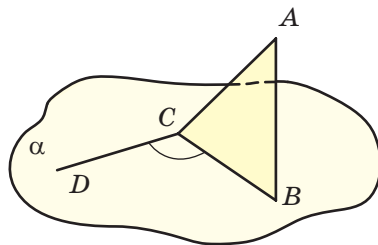


Рис. 3.63

- 57** Докажите, что плоскость линейного угла двугранного угла перпендикулярна каждой его грани.
- 58** Верно ли, что сторона линейного угла двугранного угла перпендикулярна: а) его ребру; б) его грани?

- 59** В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 3.64) проведены сечения через рёбра:
- AA_1 и CC_1 , BB_1 и DD_1 ;
 - AD и $B_1 C_1$, BC и $A_1 D_1$.

Какое взаимное положение сечений в случае а), в случае б)? Что можно сказать в каждом случае о линии их пересечения?

- 60** Докажите, что в кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ следующие плоскости перпендикулярны: а) $AA_1 D_1$ и $B_1 CD$; б) $AA_1 C_1 C$ и $BB_1 D_1 D$; в) $AB_1 C$ и $BC_1 D_1$.

- 61** Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через середины рёбер BC и CD и перпендикулярной плоскости $ABCD$.

- 62** Два прямоугольных равнобедренных треугольника имеют общую гипотенузу AB , равную 9 см; плоскости треугольников взаимно перпендикулярны (рис. 3.65). Найдите расстояние между вершинами прямых углов.

- 63** Прямая a не перпендикулярна к плоскости α . Докажите, что существует плоскость, проходящая через прямую a и перпендикулярная к плоскости α .

- 64** Взаимно перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой MN . Прямая a лежит в плоскости α и параллельна MN , прямая b – плоскости β и тоже параллельна MN . Расстояние от a до MN равно 45 мм, от b до MN – 60 мм. Вычислите расстояние между прямыми a и b (рис. 3.66).

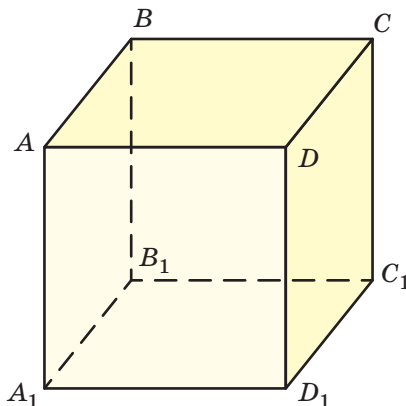


Рис. 3.64

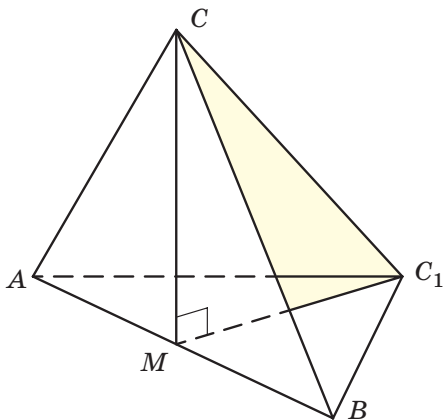


Рис. 3.65

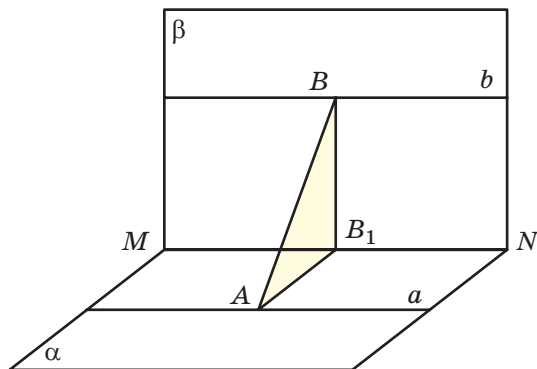


Рис. 3.66

- 65** Постройте сечение куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, которая:
- проходит через точку A и перпендикулярна прямой BD_1 ;
 - проходит через точку A и перпендикулярна прямой CD_1 ;
 - проходит через точку A и перпендикулярна прямой $B_1 D$;
 - проходит через прямую AC_1 и перпендикулярна плоскости $A_1 B_1 D_1$;
 - проходит через прямую AC_1 и перпендикулярна плоскости $DD_1 B_1$;
 - проходит через прямую AC_1 и перпендикулярна плоскости $A_1 B_1 C$;
 - проходит через прямую AD_1 и перпендикулярна плоскости CDD_1 ;
 - проходит через прямую AD_1 и перпендикулярна плоскости ABC_1 ;
 - проходит через прямую AD_1 и перпендикулярна плоскости $AA_1 C$.
- 66** Две взаимно перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой AB ; CD – прямая плоскости α , проведённая параллельно AB на расстоянии 60 см от неё; E – точка в плоскости β на расстоянии 91 см от прямой AB . Найдите расстояние от точки E до прямой CD .
- 67** Концы отрезка принадлежат двум взаимно перпендикулярным плоскостям. Длина отрезка равна a ; он образует с одной из плоскостей угол, равный 45° , а с другой – угол, равный 30° . Найдите длину отрезка прямой пересечения плоскостей, заключённого между перпендикулярами, проведёнными к этой прямой из концов данного отрезка.
- 68** Плоскости α и β взаимно перпендикулярны, MN – их линия пересечения; плоскость γ параллельна MN и пересекает плоскость α по прямой AB , плоскость β – по прямой CD . Плоскость δ , перпендикулярная прямой MN , пересекает прямую MN в точке E , AB – в F , CD – в G . Докажите, что: а) $AB \parallel CD$, б) $FE \perp CD$; в) $GE \perp AB$.

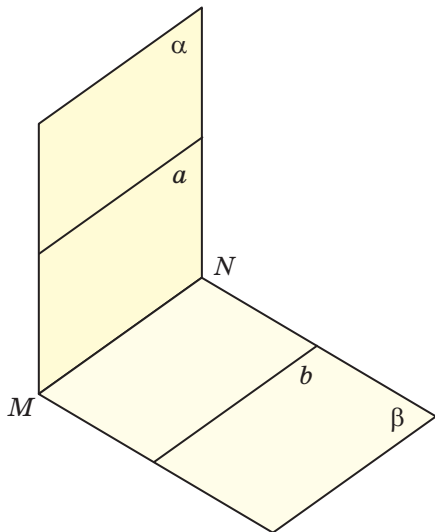


Рис. 3.67

- 69** Две взаимно перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой MN . Прямая a лежит в плоскости α и параллельна MN , прямая b – в плоскости β и тоже параллельна MN . Расстояние от a до MN равно p , от b до MN – q . Найдите расстояние между a и b (рис. 3.67).
- 70** Плоскости α , β и γ попарно перпендикулярны. Докажите, что и прямые, по которым они пересекаются, попарно перпендикулярны.

- 71** Каждая из трёх попарно перпендикулярных плоскостей проходит через точку O . Точка A удалена от этих плоскостей на 90 см, 120 см и 80 см. Найдите расстояние OA .
- 72** Найдите объединение всех прямых, пересекающих данную прямую и перпендикулярных данной плоскости.
- 73** Через данную точку проведите плоскость, перпендикулярную данной плоскости и параллельную данной прямой.
- 74** Через данную точку проведите плоскость, перпендикулярную каждой из данных двух плоскостей.
- 75** Точки A и B принадлежат различным граням прямого двугранного угла и находятся на равных расстояниях AA_1 и BB_1 от его ребра. Известно, что $AB : AA_1 = 2$. Найдите угол между прямой AB и ребром двугранного угла, а также углы между AB и каждой из его граней.

ЗАДАЧИ К § 3.4–3.5



- 76** На рис. 3.68 изображён прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Назовите параллельные грани этого параллелепипеда.

- 77** Укажите модели параллельных плоскостей на предметах классной обстановки.

- 78** Ученик сформулировал утверждение: «Две плоскости параллельны, если две прямые одной плоскости параллельны двум прямым другой плоскости». Верно ли это утверждение?

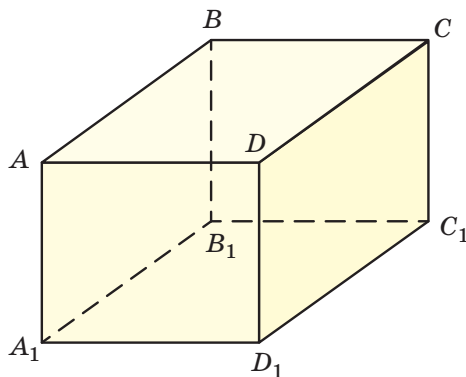


Рис. 3.68

- 79** Две параллельные плоскости α и β пересекают сторону AB угла ABC в точках D и D_1 , а сторону BC соответственно в точках E и E_1 . Найдите длину отрезка DE , если $BD = 12$ см, $BD_1 = 18$ см, $D_1E_1 = 54$ см.
- 80** Параллельные плоскости α и β пересечены соответственно одной прямой в точках A и B , а другой прямой — в точках A_1 и B_1 (рис. 3.69). Можно ли утверждать, что $AB \parallel A_1B_1$, если известно, что:
- а) $AA_1 = BB_1$; б) $AB = A_1B_1$?

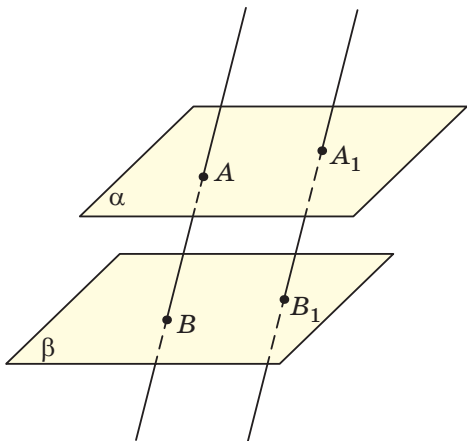


Рис. 3.69

- 81** Прямая a параллельна плоскости α . Как через прямую a провести плоскость, параллельную плоскости α ?
- 82** Через какие три вершины прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проходит плоскость, параллельная плоскости $AB_1 C$?
- 83** Диагональ и сторона многоугольника параллельны плоскости α . Следует ли отсюда, что плоскость многоугольника параллельна плоскости α , если многоугольник имеет: а) четыре стороны; б) пять сторон; в) n сторон ($n > 5$)?

- 84** Могут ли иметь равные длины отрезки непараллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями?
- 85** Плоскость γ пересекает плоскости α и β по параллельным прямым. Следует ли из этого, что плоскости α и β параллельны?
- 86** Могут ли пересекаться различные плоскости α и β , если каждая из них параллельна плоскости γ ?

Н

- 87** Точка B лежит вне плоскости α . Проведите через B плоскость, параллельную α .
- 88** Прямые a и b – скрещивающиеся. Проведите через них параллельные плоскости.
- 89** Прямые a и b – скрещивающиеся. Через прямую a проведена плоскость α , параллельная прямой b , через прямую b – плоскость β , параллельная прямой a . Как взаимно расположены плоскости α и β ?
- 90** а) Дано: плоскость α параллельна плоскости β , прямая b лежит в плоскости β . Докажите, что прямая b параллельна плоскости α .
б) Дано: плоскость α параллельна плоскости β , точки A и B лежат в плоскости α , точки C и D лежат в плоскости β , прямые AC и BD параллельны. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.
- 91** Одна сторона треугольника принадлежит плоскости α , а параллельная ей плоскость β пересекает две другие стороны треугольника. Докажите, что плоскость β отсекает от него треугольник, подобный данному.

- 92** Докажите, что противоположные грани прямоугольного параллелепипеда параллельны.
- 93** Прямая DF пересекает параллельные плоскости α , β и γ соответственно в точках D , E и F , при этом $DF = 9$, $EF = 3$. Прямая EG пересекает плоскости α и γ соответственно в точках G и H , при этом $EG = 12$. Найдите длину отрезка GH .
- 94** Точка X делит ребро AB куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ в отношении $AX : XB = 2 : 3$. Постройте сечение этого куба плоскостями:
а) XCC_1 ; б) $XC_1 D_1$; в) XCA_1 ; г) XCD_1 .
- 95** Равные треугольники ABC и $A_1 B_1 C_1$ размещены в плоскостях α и β так, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 параллельны. Следует ли из этого, что плоскости α и β параллельны?
- 96** Если секущая плоскость пересекает все шесть граней прямоугольного параллелепипеда, то в сечении получается шестиугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны. Докажите.
- 97** Каждая грань доски – прямоугольник (рис. 3.70). Докажите, что, как бы ни распиливали доску, пересекая её продольные рёбра, в сечении всегда будет получаться параллелограмм.

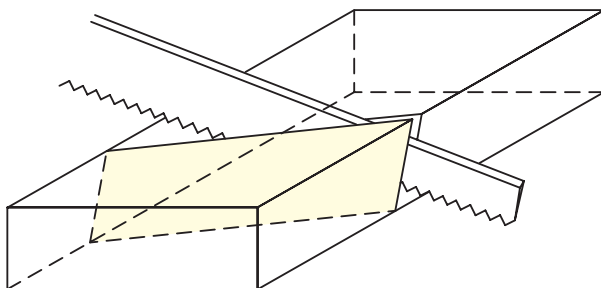


Рис. 3.70

- 98** $ABCDEF A$ – неплоская замкнутая ломаная из шести звеньев. Докажите, что если $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ и $CD \parallel FA$, то $AB = DE$, $BC = EF$ и $CD = FA$.
- 99** Докажите, что если плоскость перпендикулярна к одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости.
- 100** Прямые a , b , c , не лежащие в одной плоскости, имеют общую точку O . На каждой из этих прямых взяты по разные стороны от точки O соответственно пары точек: A_1 и A_2 , B_1 и B_2 , C_1 и C_2 . Докажите, что плоскости $A_1 B_1 C_1$ и $A_2 B_2 C_2$ параллельны, если $OA_1 = OA_2$, $OB_1 = OB_2$, $OC_1 = OC_2$.

- 101** Докажите, что если каждая из двух пересекающихся прямых плоскости α параллельна плоскости β , то эти плоскости параллельны.
- 102** Найдите множество всех точек, удалённых от данной плоскости α на расстояние l .
- 103** Найдите множество всех точек, каждая из которых удалена от данной плоскости на расстояние: а) меньше, чем l ; б) больше l .
- 104** Найдите множество всех точек, равноудалённых от данных двух плоскостей, если эти плоскости:
а) параллельные; б) пересекающиеся.
- 105** Найдите множество середин всех отрезков, концы которых принадлежат двум данным параллельным плоскостям.
- 106** Через точку одной из двух параллельных плоскостей проведена прямая, параллельная другой плоскости. Докажите, что эта прямая лежит в первой плоскости.

М

- 107** Какой вид имеют сечения куба, перпендикулярные его диагонали? Какое из них имеет наибольшую площадь? Чему она равна в кубе с ребром 1?

ЗАДАЧИ К § 3.6

Н



- 108** Что называется общим перпендикуляром к двум скрещивающимся прямым? Сколько различных общих перпендикуляров можно провести к данным двум скрещивающимся прямым?
- 109** Рассмотрим всевозможные отрезки с концами на данных двух параллельных прямых и выберем из них все отрезки, имеющие наименьшую длину.
а) Сколько отрезков может оказаться среди выбранных?
б) Какой геометрической фигурой является множество середин всех выбранных отрезков?
- 110** Рассмотрим всевозможные отрезки с концами на данных двух скрещивающихся прямых и выберем из них все отрезки, имеющие наименьшую длину.
а) Сколько отрезков может оказаться среди выбранных?
б) Какой геометрической фигурой является множество середин всех выбранных отрезков?

- 111** В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на модели и на чертеже покажите расстояние между: а) рёбрами AA_1 и BC ; б) диагональю $A_1 D$ грани $AA_1 D_1 D$ и ребром CC_1 ; в) диагоналями AB_1 и $D_1 C$ граней $AA_1 B_1 B$ и $CC_1 D_1 D$.
- 112** На изображении прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ укажите общий перпендикуляр прямых: а) $A_1 D$ и BB_1 ; б) DC и $B_1 C_1$; в) CC_1 и AB .

Н



- 113** Одна из двух скрещивающихся прямых лежит в плоскости α , другая — перпендикулярна α . Как расположен общий перпендикуляр данных прямых?

Н

- 114** В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребро равно a . Найдите расстояние между прямыми: а) AA_1 и BC ; б) $A_1 B_1$ и CC_1 ; в) $B_1 D_1$ и AB ; г) AC и BB_1 ; д) AA_1 и $B_1 D_1$; е) AA_1 и BD .
- 115** Плоскости α и β не имеют общих точек. В плоскости α взята прямая a , в плоскости β — прямые b , c и d , попарно не параллельные между собой. Можно ли из прямых a , b , c и d выбрать:
а) пару скрещивающихся прямых?
б) две пары скрещивающихся прямых?
в) четыре пары скрещивающихся прямых?
- 116** Отрезок AB перпендикулярен двум скрещивающимся прямым a и b , причём $A \in a$, $B \in b$. На прямых a и b отложены отрезки $AA_1 = BB_1$. Докажите, что а) $AB_1 = A_1 B$; б) отрезок $A_1 B_1$ образует равные углы с прямыми a и b .

П

- 117** Через середину общего перпендикуляра MN двух скрещивающихся прямых проведена плоскость γ , перпендикулярная MN . Докажите, что γ делит пополам любой отрезок, соединяющий точку одной прямой с точкой другой прямой.
- 118** Даны скрещивающиеся прямые a и b , угол между которыми равен φ , а длина их общего перпендикуляра MN равна d . На данных прямых взяты соответственно точки A и B так, что $MA = m$, $NB = n$. Найдите AB .
- 119** Определите расстояние между скрещивающимися диагоналями смежных граней куба, ребро которого равно a .

- 120** Определите расстояние между диагональю куба с ребром a и скрещивающейся с ней диагональю грани.

М

- 121** Даны две скрещивающиеся прямые a и b . На прямой a взяты точки A_1, A_2, A_3 и из этих точек опущены перпендикуляры A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 на прямую b . Докажите, что $A_1A_2 : A_2A_3 = B_1B_2 : B_2B_3$.
- 122** Дан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $AB = c$ и острым углом BAC , равным 30° . Вне плоскости ABC взята такая точка S , что плоскость SAC перпендикулярна плоскости ABC , а каждая из плоскостей SAB и SBC образует с ней угол, равный 30° . Определите расстояние между прямыми SB и AC .
- 123** Дан прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$) с катетом $BC = a$ и прилежащим острым углом α . Вне плоскости ABC взята такая точка S , что каждый из отрезков SA, SB и SC образует с плоскостью ABC угол β . Определите расстояние между гипотенузой AB и скрещивающейся с ней прямой SC .
- 124** Дан правильный треугольник ABC со стороной, равной a . Вне плоскости ABC взята такая точка S , что каждый из отрезков SA, SB и SC образует с плоскостью ABC угол, равный 60° . Определите расстояние между скрещивающимися прямыми SA и BC .
- 125** Вне плоскости квадрата $ABCD$ со стороной a взята точка S , равноудалённая от всех вершин квадрата. Определите расстояние между скрещивающимися прямыми SA и BC , если известно, что угол ASB равен α .

ГЛАВА 4

МНОГОГРАННИКИ

На разных этапах развития математики вплоть до настоящего времени геометры возвращались к теории выпуклых многогранников и открывали в ней её новые фундаментальные факты.

*Лазарь Аронович Люстерник
(русский математик, 1899–1981)*

§ 4.1



ПОНЯТИЕ МНОГОГРАННИКА

В учебнике геометрии для 7–9-го классов часто упоминались различные многогранники; им даже посвящён отдельный параграф (3.4. «Знакомство с многогранниками»). Но мы там не давали определения понятия «многогранник».

При определении понятия «многогранник» есть свои особенности и трудности.



Многогранник – это геометрическое тело, являющееся объединением граничной поверхности, состоящей из многоугольников, и части пространства, заключённой внутри этой поверхности (внутренней области).

Поговорим подробнее о поверхности многогранника.



Какими свойствами должен обладать набор многоугольников, из которых состоит поверхность многогранника?

Перечислим некоторые из этих свойств:

1. Каждая сторона любого многоугольника является стороной ещё одного и только одного многоугольника набора.
2. Любые два многоугольника набора являются связанными между собой цепочкой из многоугольников набора, причём в этой цепочке каждый следующий многоугольник имеет общую сторону с предыдущим.
3. Любые две вершины любых двух многоугольников набора можно соединить ломаной, звеньями которой являются стороны многоугольников набора.

Эти свойства помогут нам отличать многогранники от геометрических фигур, которые многогранниками не являются.

Например, на рис. 4.1 изображена прямоугольная пластина с вырезанным отверстием. Эта фигура не является многогранником, т.к. для неё не выполнено свойство 3 (проверьте). Фигуры, изображённые на рис. 4.2. и рис. 4.3, тоже не являются многогранниками, т.к. для первой из них не выполнено свойство 1, а для второй – свойство 2.

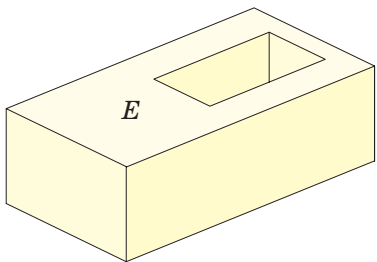


Рис. 4.1

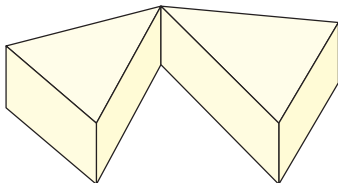


Рис. 4.2

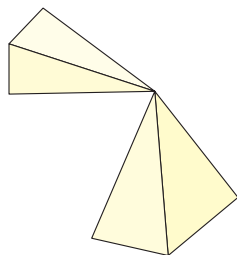


Рис. 4.3

§ 4.2



ПРИЗМЫ

Нам уже знакомы различные многогранники: куб, прямоугольный параллелепипед, пирамида, правильные многогранники. Гранями этих многогранников могут быть треугольники, квадраты, прямоугольники и другие многоугольники. До сих пор отдельно не рассматривались многогранники, гранями которых (всеми или только некоторыми) являются параллелограммы. Теперь мы приступим к изучению таких многогранников.

Представьте себе, что на столе стоит шарнирный прямоугольный параллелепипед с квадратами в основании (рис. 4.4) и мы нажали на его верхнюю грань. При этом получится многогранник $ABCA_1B_1C_1D_1$, у которого уже не все грани – квадраты и прямоугольники. В основаниях остались квадраты $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Грани ABA_1B_1 , BCB_1C_1 , CDC_1D_1 , DAD_1A_1 стали параллелограммами (рис. 4.5).

Можно представить себе похожий многогранник, у которого все грани будут параллелограммами. Найдите такой многогранник в окружающей обстановке или сконструируйте его сами.

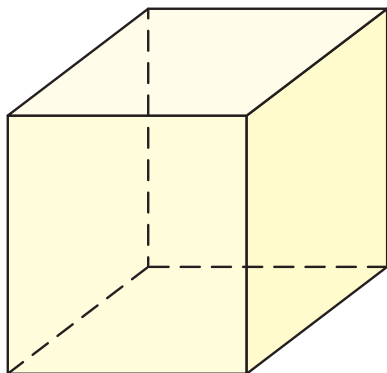


Рис. 4.4

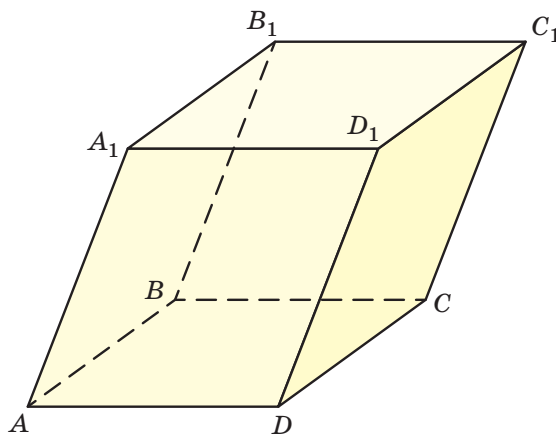


Рис. 4.5

Подумайте над таким вопросом:



Существует ли разница в изображении многогранника, у которого две грани – квадраты, а остальные – параллелограммы, и многогранника, все грани которого – параллелограммы?

Размышляя над этим, вы более глубоко поймёте законы изображения пространственных фигур на плоскости (на листе бумаги). Дело в том, что разницы в изображении нет. Мы позднее вернёмся к этому вопросу.

Во всех обсуждаемых случаях речь идёт о так называемых *четырёхугольных призмах*. Дадим общее определение призмы.

Определение 31. Призмой называется многогранник, у которого две грани, называемые *основаниями призмы*, равны и их соответственные стороны параллельны, а остальные грани – параллелограммы, у каждого из которых две стороны являются соответственными сторонами оснований. Эти остальные грани называются *боковыми гранями призмы*, а их стороны, не лежащие на основаниях призмы, – *боковыми рёбрами призмы*.

Отрезки, соединяющие соответствующие вершины оснований призмы (боковые рёбра), равны и параллельны друг другу (объясните, почему).

На рис. 4.6 изображена четырёхугольная призма $ABCFA'B'C'F'$. Четырёхугольники $ABCF$ и $A'B'C'F'$ – равные основания (произвольные четырёхугольники). Грани $ABA'B'$, $BCB'C'$, $CFC'F'$, $FAA'F'$ – параллелограммы. Рёбра AA' , BB' , CC' , FF' равны между собой и параллельны.

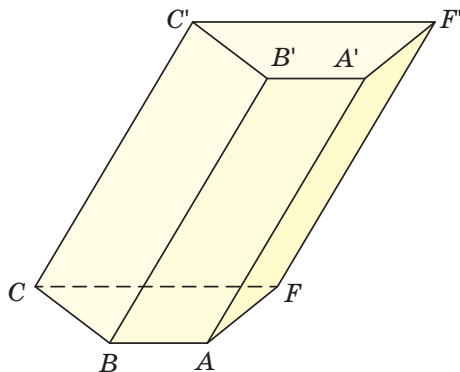


Рис. 4.6.

В зависимости от количества сторон основания различают призмы треугольные (рис. 4.7а), четырёхугольные (рис. 4.7б), пятиугольные (рис. 4.7в) и т.д. В основании призмы может лежать произвольный n -угольник, такая призма называется n -угольной.

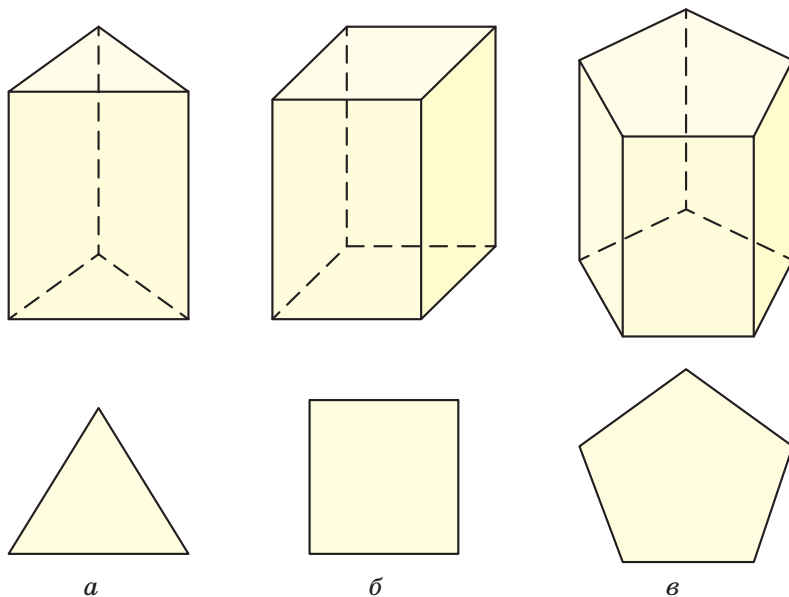


Рис. 4.7

Во всех приведённых выше примерах в основании призмы лежали выпуклые многоугольники. Но есть призмы, в основании которых лежат и невыпуклые многоугольники. В этом случае мы получаем невыпуклые призмы. На рис. 4.8а, б призмы выпуклые, а на рис. 4.8в, г – невыпуклые. В дальнейшем мы будем изучать свойства только выпуклых призм.

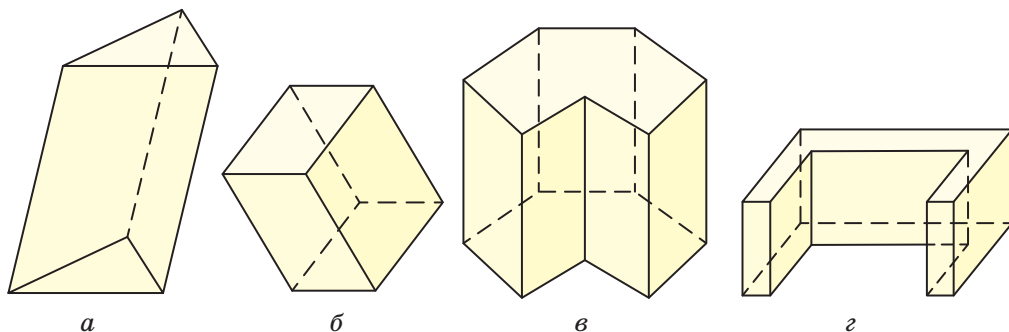


Рис. 4.8

Приведём интересный пример многогранника, который не является призмой. На рис. 4.9 у многогранника так же, как и у всякой призмы, есть два равных «основания», но боковые грани не параллелограммы, а треугольники. Такой многогранник называют *антипризмой*.

Среди различных призм выделяют два вида: прямые и наклонные призмы. На рис. 4.10а изображена наклонная шестиугольная призма, а на рис. 4.10б – прямая шестиугольная призма.

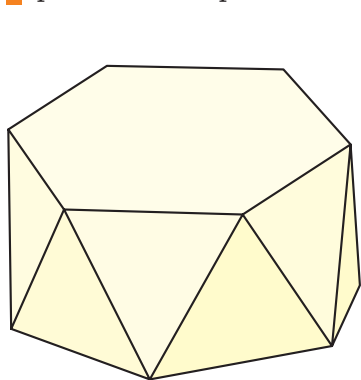
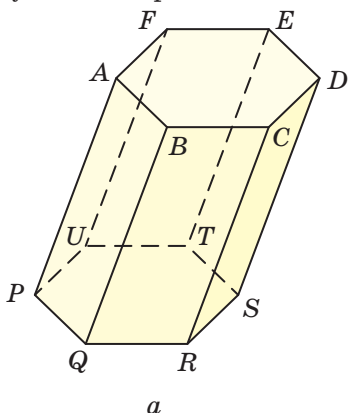
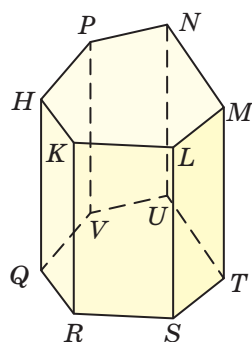


Рис. 4.9



а



б

Рис. 4.10



Чем отличаются прямая и наклонная призмы? Какие отношения между элементами призм определяют это отличие?

Используя определение перпендикулярности прямой и плоскости, дадим определение прямой призмы.

Определение 32. Призма, боковые рёбра которой перпендикулярны основаниям, называется *прямой призмой*. Призма, не являющаяся прямой, называется *наклонной*.

После изучения понятия перпендикулярности плоскостей и их свойств можно утверждать, что любые две смежные грани прямоугольного параллелепипеда взаимно перпендикулярны (это следует из признака перпендикулярности плоскостей – Т. 28 (вывод обоснуйте)).

На рис. 4.11 изображена прямая шестиугольная призма. Все её боковые грани перпендикулярны основаниям.

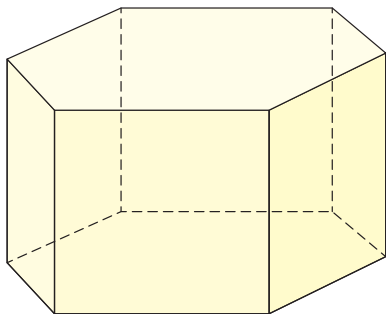


Рис. 4.11

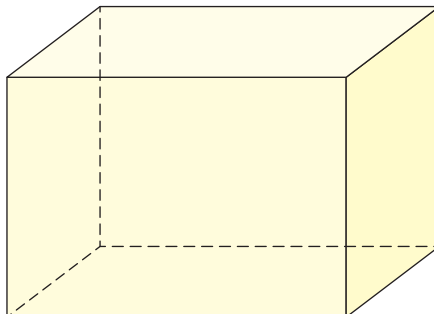


Рис. 4.12

Для прямоугольного параллелепипеда (рис. 4.12) в результате наших рассуждений верны следующие свойства:

- 1) рёбра, сходящиеся в каждой его вершине, взаимно перпендикулярны;
- 2) любые две его смежные грани перпендикулярны;
- 3) каждое его ребро перпендикулярно тем противоположным граням, на которых лежат концы этого ребра.

Мы видим, что у прямой призмы боковые рёбра образуют с рёбрами оснований прямые углы, а боковыми гранями таких призм являются прямоугольники, а у наклонных призм все боковые грани – параллелограммы. (Некоторые из которых могут быть и прямоугольниками.)

Можно выделить ещё один вид призм – правильные.

Определение 33. Прямая призма называется *правильной*, если её основаниями являются правильные многоугольники.

На рис. 4.4 изображены прямые призмы. В их основаниях лежат правильный треугольник, квадрат и правильный пятиугольник. Все эти призмы правильные. Однако этот рисунок может служить и изображениями соответствующих произвольных призм (объясните, почему?).

Определение 34. Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной её грани, называется *диагональю* призмы.

Попробуйте изобразить все диагонали четырёхугольной призмы.



Сколько получилось диагоналей? У всякой ли призмы есть диагонали? Сколько диагоналей у пятиугольной призмы?

Мы уже рассмотрели сечения некоторых многогранников, например куба. При пересечении призмы плоскостями также получаются сечения. Некоторые сечения призмы связаны с расположением её диагоналей.

Определение 35. *Диагональным сечением призмы называется сечение её плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани.*

Обратите внимание, диагональное сечение призмы – это вовсе не сечение, проходящее через её диагональ!

На рис. 4.15а изображена призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, одна из её диагоналей – AC_1 . Сечение $ABC_1 D_1$ не является диагональным сечением этой призмы, хотя и проходит через диагональ AC_1 .

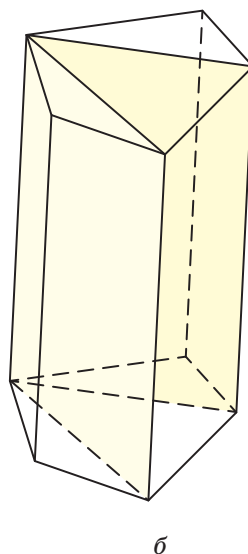
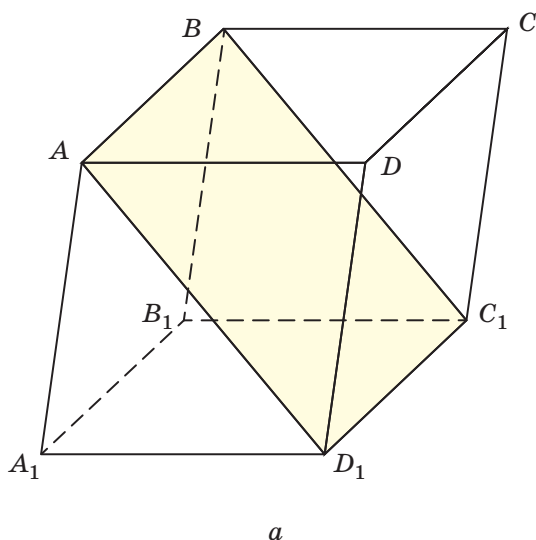


Рис. 4.15

Диагональные сечения призмы связаны с соответственными диагоналями оснований. На рис. 4.15б изображены два сечения пятиугольной призмы, проходящие через соответственные диагонали оснований.

Ответьте на вопрос:



Есть ли ещё диагональные сечения у данной призмы? Сколько таких сечений можно провести для данной призмы?

§ 4.3



ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЫ

4.3.1 ПОНЯТИЕ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Среди призм наиболее часто встречаются *параллелепипеды*. Можно дать такое их определение:

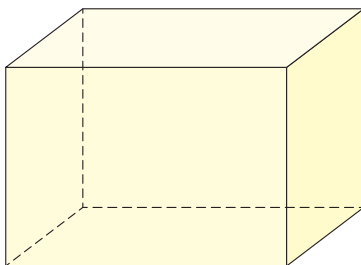
Определение 36. Призма, у которой основания – параллелограммы, называется *параллелепипедом*.

У параллелепипеда шесть граней, и все они параллелограммы. Эти параллелограммы попарно равны, а их стороны попарно параллельны. Любую грань параллелепипеда можно принять за основание. Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются *противолежащими*. На рис. 4.16 изображены два параллелепипеда: *а* – прямой, *б* – наклонный.

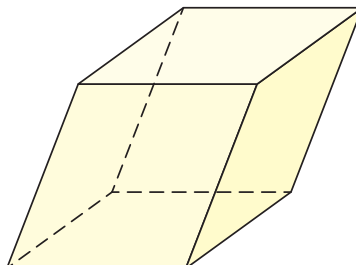
Дадим ещё раз определение уже знакомых нам параллелепипедов – прямоугольного параллелепипеда и куба.

Определение 37. Прямой параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом*.

Прямоугольный параллелепипед является примером многогранника, который наиболее широко встречается в окружающей нас действительности.



a



б

Рис. 4.16

сти. Практически все здания и все коробки для упаковки товара имеют форму прямоугольного параллелепипеда.

Длины трех рёбер прямоугольного параллелепипеда, имеющих общую вершину, называют *измерениями этого параллелепипеда*, их часто называют ещё *длиной, шириной и высотой* прямоугольного параллелепипеда.

У параллелепипеда, изображённого на рис. 4.17а, длина равна 12 см, ширина 10 см, высота 8 см, а у куба на рис. 4.17б все три измерения равны 10 см.

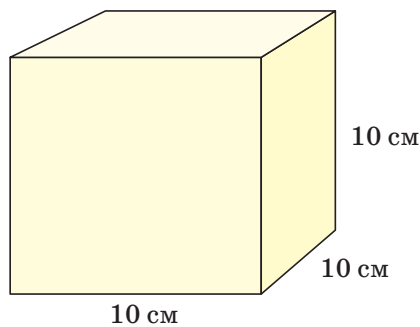
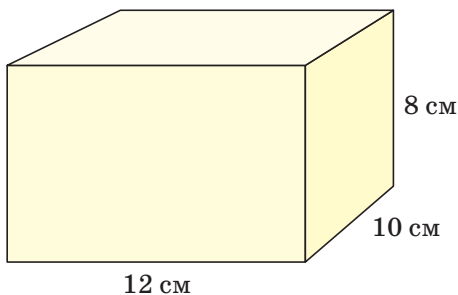


Рис. 4.17

Наконец, мы можем дать ещё одно определение очень хорошо знакомого нам многогранника – куба.

Определение 38. Прямоугольный параллелепипед, все рёбра которого равны, называется *кубом*.

4.3.2 ДИАГОНАЛИ ПАРALLEЛЕПИПЕДА

Если соединить отрезками две вершины параллелепипеда, не принадлежащие одной грани, то получим *диагональ параллелепипеда*.

У каждого параллелепипеда восемь вершин и четыре диагонали. Докажем две теоремы о свойствах диагоналей параллелепипеда.

Теорема 42. Все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Доказательство

1. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – параллелепипед.
 2. AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 – диагонали параллелепипеда. } (дано) (рис. 4.18)
 3. Диагонали AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам (требуется доказать).

4. Рёбра параллелепипеда $AB, DC, D_1 C_1, A_1 B_1$ равны и параллельны (1, определение параллелограмма).

5. Четырёхугольники $ABC_1 D_1$ и $DCB_1 A_1$ – параллелограммы (1, 4, признаки параллелограмма).

Таким образом, мы выбрали два параллелограмма, в которых диагонали параллелепипеда являются их диагоналями. Нам надо доказать, что эти диагонали пересекаются в одной точке и в этой точке делятся пополам.

6. Пусть диагонали AC_1 и BD_1 параллелограмма $ABC_1 D_1$ пересекаются в точке O , а диагонали CA_1 и DB_1 , параллелограмма $BCD_1 A_1$ пересекаются в точке O_1 (предположение).

7. $ACC_1 A_1$ – параллелограмм (1, определение параллелограмма).

8. Точки O и O_1 являются серединами отрезков AC_1 и DB_1 (7, свойства параллелограммов).

9 (3). Точки O и O_1 совпадают, и тем самым п. 3 доказан. ■

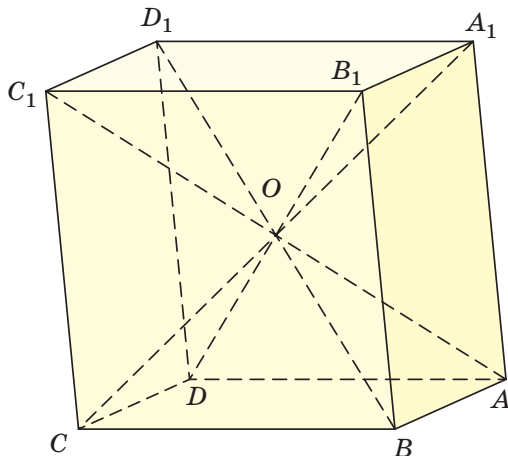


Рис. 4.18

Теорема 43*. Сумма квадратов всех диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов всех его рёбер.

Доказательство

1. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – параллелепипед.
 2. AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 – диагонали параллелепипеда. } (дано) (рис. 4.18)
 3. Обозначим длины рёбер $AB = a, BC = b, AA_1 = c$ и длины диагоналей $AC_1 = d_1, BD_1 = d_2, CA_1 = d_3, DB_1 = d_4$.
 4. $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$ (требуется доказать).

5. Аналогично тому, как это сделано в доказательстве теоремы 42, устанавливаем, что четырёхугольники ABC_1D_1 , CDA_1B_1 – параллелограммы.

6. В параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон.

Запишем соответственные равенства:

– для параллелограмма ABC_1D_1 : $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2 \cdot C_1B^2$

– для параллелограмма CDA_1B_1 : $d_3^2 + d_4^2 = 2a^2 + 2 \cdot B_1C^2$

7. Сложив почленно эти два равенства, получим:

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 4a^2 + 2 \cdot (C_1B^2 + B_1C^2).$$

8 (4). Теперь заметим, что C_1B и B_1C – диагонали параллелограмма BB_1C_1C со сторонами, равными b и c , значит, $C_1B^2 + B_1C^2 = 2b^2 + 2c^2$, что после подстановки в предыдущее равенство даст:

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 4a^2 + 2 \cdot (2b^2 + 2c^2) = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2,$$

что и требовалось доказать. ■

4.3.3 ОБОБЩЁННАЯ ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Вспомним о великой теореме геометрии – *теореме Пифагора*. Мы изучили её в 8-м классе.

Теорема Пифагора замечательна уже тем, что она вовсе не очевидна. Практически все доказанные нами теоремы становятся почти очевидными, если только хорошо понять их содержание, хотя точное доказательство может быть не очень простым. Так, например, то, что перпендикуляр короче наклонной, просто видно на чертеже.

Но сколько ни смотри на прямоугольный треугольник, нельзя увидеть, почему между его сторонами всегда выполняется одно и то же простое соотношение, хотя известны очень ясные доказательства этого соотношения.

Важность теоремы Пифагора состоит прежде всего в том, что из неё или с её помощью можно выводить все теоремы, касающиеся длин отрезков, величин углов на плоскости и в пространстве (не считая самых первых теорем об углах).

Докажем теперь теорему, которую можно считать *обобщённой теоремой Пифагора в пространстве*.

Теорема 44. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.

Доказательство

1. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямоугольный параллелепипед, } (дано) (рис. 4.19)
измерения которого $AD = a$, $AB = b$, $AA_1 = c$.

2. $c^2 + a^2 + b^2 = A_1 C^2$ (требуется доказать).

3. Прямая AA_1 перпендикулярна плоскости $ABCD$, а значит, $\angle A_1 AC = 90^\circ$ (1, Т. 8).

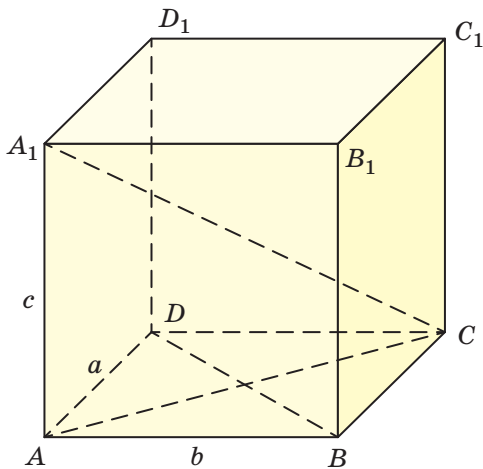


Рис. 4.19

4. $A_1C^2 = c^2 + AC^2$ (3, Т. Пифагора).
 5. $AC = BD$ (1, свойство прямоугольника).

6. $A_1C^2 = c^2 + BD^2$ (4, 5).

7. $BD^2 = a^2 + b^2$ (1, Т. Пифагора).

8. $A_1C^2 = c^2 + a^2 + b^2$ (6, 7). ■

Замечание. Доказательство теоремы можно было так же получить, как следствие теоремы 43.

Действительно, т.к. у прямоугольного параллелепипеда все диагонали равны между собой, то, взяв $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d$ в формуле $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$, получаем $4d^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$, или $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. ■

4.3.4*

ЦЕНТР СИММЕТРИИ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА.

ПЛОСКОСТИ СИММЕТРИИ НЕКОТОРЫХ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОВ



Пользуясь теоремой 42, докажите самостоятельно, что точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.



Можно также доказать, что у *прямоугольного параллелепипеда* есть три плоскости симметрии, проходящие через центр симметрии параллельно граням. На рис. 4.20 изображена одна из таких плоскостей. Она проходит через середины четырёх параллельных рёбер прямоугольного параллелепипеда. Концы рёбер симметричны друг другу относительно этой плоскости.

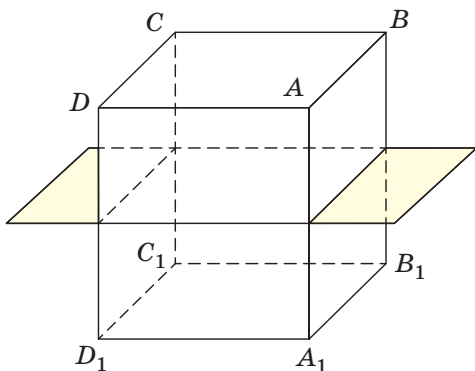


Рис. 4.20

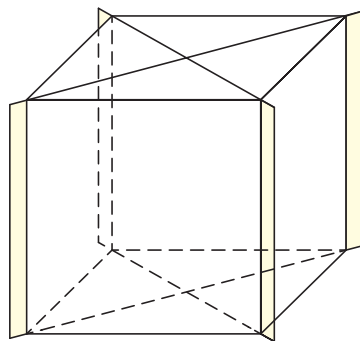


Рис. 4.21

Если у прямоугольного параллелепипеда все измерения (размеры) различны, то у него нет других плоскостей симметрии. Если у него равны два измерения (можно сказать и по-другому: если он является правильной четырёхугольной призмой), то плоскости диагональных сечений являются ещё двумя плоскостями симметрии (рис. 4.21). У куба имеются ещё четыре диагональные плоскости симметрии.

При пересечении прямоугольного параллелепипеда плоскостью могут получаться более сложные сечения (позднее, в параграфе 4.6, мы научимся их строить). Посмотрите на рис. 4.22, и вы увидите различные сечения прямоугольного параллелепипеда.

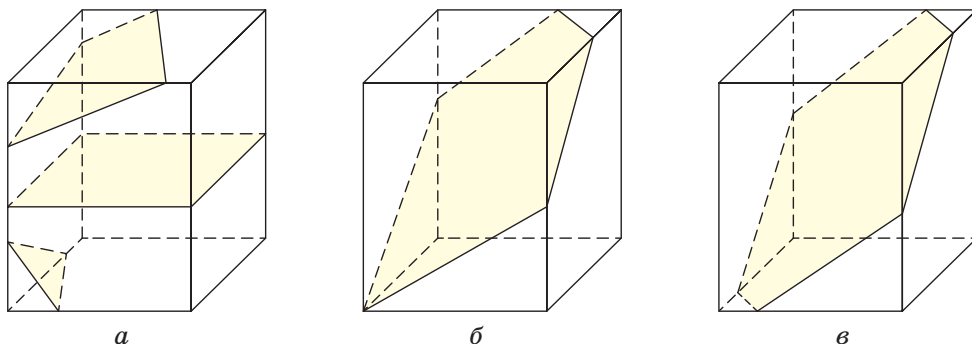


Рис. 4.22

§ 4.4



ПОВЕРХНОСТИ ПРИЗМЫ И ИХ ПЛОЩАДЬ

4.4.1 ПОНЯТИЕ РАЗВЁРТКИ ПРИЗМЫ

В нашем курсе геометрии многогранник – это часть пространства, ограниченная со всех сторон многоугольниками. Объединение этих многоугольников является *поверхностью соответствующего многогранника*. Важно понимать, что мы различаем фигуру (например, призму) и её поверхность.

Поверхность не имеет толщины, чего нельзя сказать, например, о стенах комнаты или о стенках коробки спичек.

Пониманию отличия многогранника и его поверхности способствуют развёртки многогранников, с которыми мы довольно подробно познакомились в параграфе 4.2 учебника геометрии 7-го класса. На рис. 4.23а изображена развёртка поверхности многогранника. Она состоит из двух квадратов и четырёх равных прямоугольников.

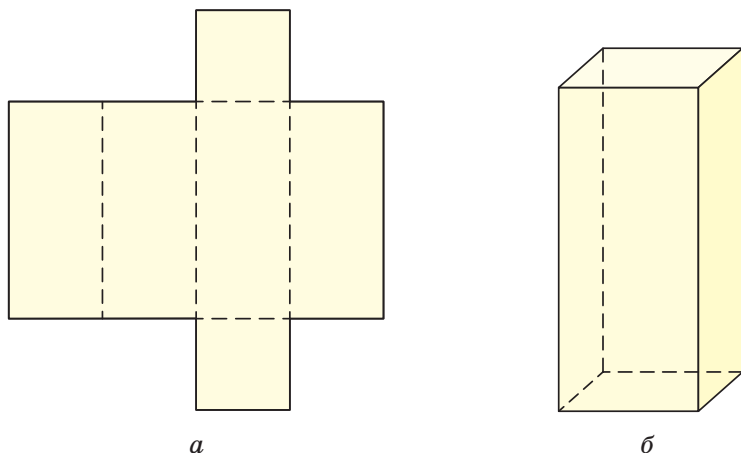


Рис. 4.23

Если эту развёртку согнуть надлежащим образом по пунктирным линиям, то получим поверхность многогранника – правильной четырёхугольной призмы (рис.4.23б).

Развёртка поверхности прямоугольного параллелепипеда может состоять и из шести прямоугольников, такой многогранник – прямоугольный параллелепипед (рис. 4.24).

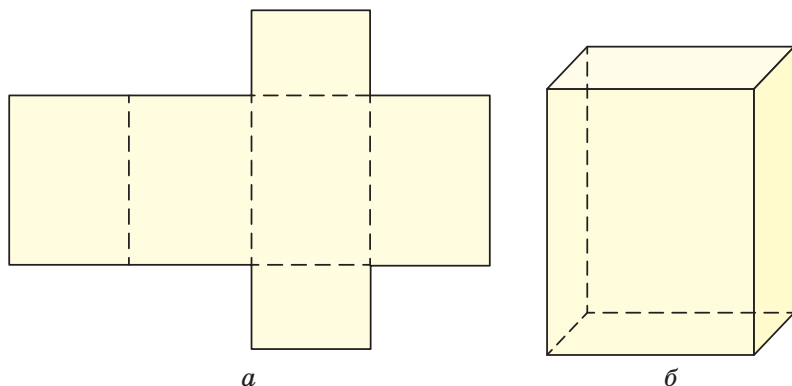


Рис. 4.24

Напомним, что для многогранников, вернее для их поверхностей, есть процедура, называемая «разрезанием по ребру», которая позволяет получить развёртку. Представьте себе, что у нас есть правильная шестиугольная призма (рис. 4.25а). Можно по-разному разрезать её поверхность по рёбрам. Попробуйте это сделать (желательно иметь картонную модель такой призмы, но может выручить шестигранный карандаш, только разрезать его не удастся).

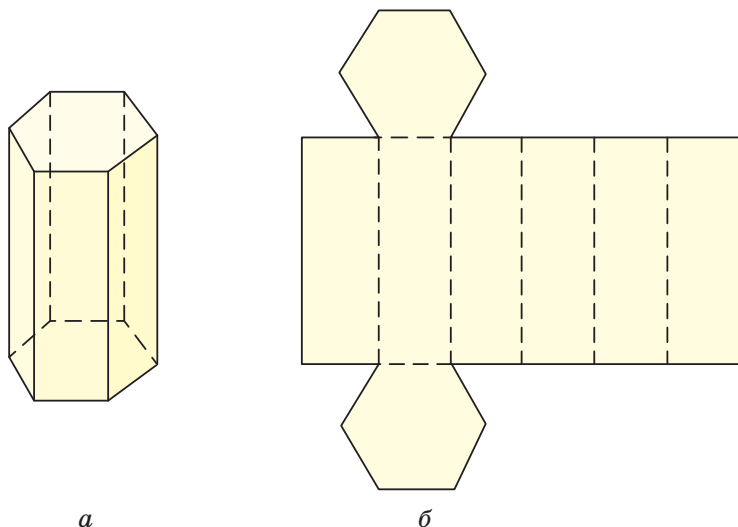


Рис. 4.25

Процесс разрезания призмы по её ребрам можно проводить мысленно. Одна из возможных развёрток показана на рис. 4.25б. При решении задач мы будем практиковаться в построении развёрток и их использовании для изучения свойств многогранников.

Как и у куба, у прямоугольного параллелепипеда могут быть различные развёртки. Для понимания этого ответьте на вопрос:



Какие из фигур, изображённых на рис. 4.26, являются развёртками прямоугольного параллелепипеда?

Обоснуйте свой ответ.

Уточним наши представления о поверхности призмы и, в частности, прямоугольного параллелепипеда. Полная поверхность призмы состоит из оснований и боковой поверхности. *Боковая поверхность* состоит из параллелограммов. У каждого из этих параллелограммов две стороны являются соответствующими сторонами оснований, а две другие – соседними боковыми рёбрами призмы.

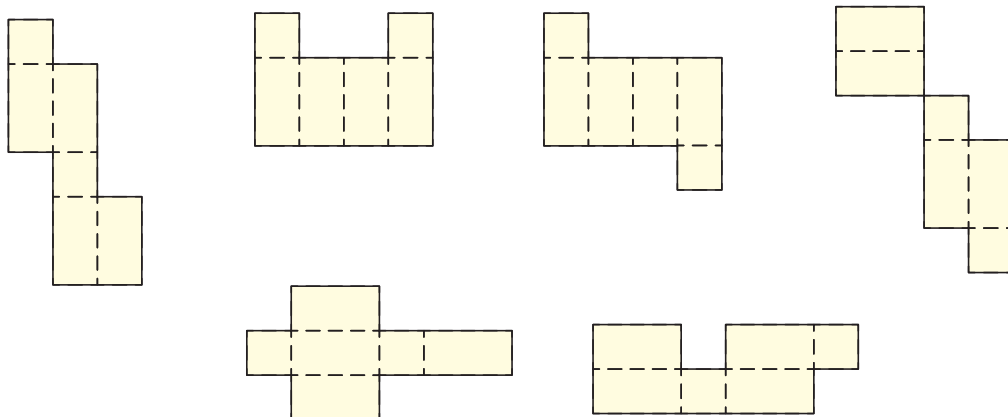


Рис. 4.26

Боковая поверхность призмы, изображённой на рис. 4.27, состоит из параллелограммов ABB_1A_1 , BCC_1B_1 , DCC_1D_1 , ADD_1A_1 . Полная поверхность состоит из оснований $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ и из указанных выше параллелограммов.

У прямой призмы все боковые грани – прямоугольники, а у прямоугольного параллелепипеда и основания тоже прямоугольники.

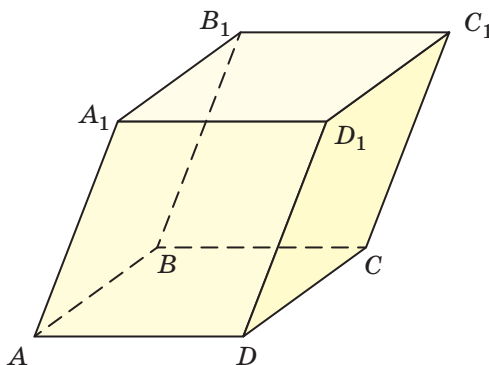


Рис. 4.27

4.4.2 ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ПРИЗМЫ

В курсе геометрии 7–9-го классов мы получили формулы для нахождения площадей многоугольников. Это позволяет нам находить площади боковых и полных поверхностей призмы.

1. Площадь боковой поверхности прямой призмы есть сумма площадей прямоугольников, являющихся её боковыми гранями.

2. Обозначим через h высоту призмы и через $a, b, \dots, l$ – стороны основания (рис. 4.28).

3. Так как боковые грани прямой призмы – прямоугольники, то площадь боковой поверхности этой призмы равна:

$$S_{\text{бок.пов.пр.}} = ah + bh + \dots + lh = (a + b + \dots + l)h = Ph,$$

где P – периметр основания призмы.

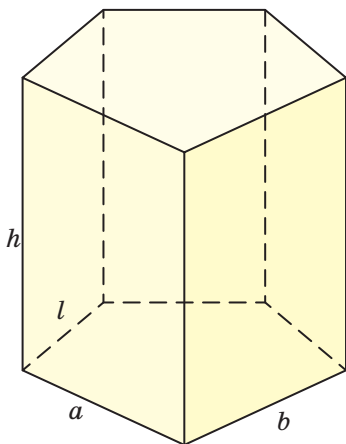


Рис. 4.28

4. Итак, $S = Ph$. ■

Мы доказали следующую теорему:

Теорема 45. *Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания призмы на высоту.*

Площадь полной поверхности прямой призмы равна сумме площади боковой поверхности и удвоенной площади основания.

Чтобы вычислить площадь полной поверхности куба, надо вычислить площадь одной его грани и полученное число умножить на 6. Если ребро куба обозначить через a , то площадь поверхности одной его грани будет равна a^2 , а площадь всей поверхности куба (полная поверхность) составит $6a^2$:

$S = 6a^2$, где S – площадь полной поверхности куба.

Площадь поверхности оснований куба $2a^2$. Площадь поверхности его боковых граней равна $4a^2$.

Последние две главы учебника Геометрии для 11-го класса будут посвящены нахождению объёмов различных геометрических фигур.

§ 4.5



ПИРАМИДЫ. УСЕЧЁННЫЕ ПИРАМИДЫ

В нашем курсе геометрии 7–9-го классов пирамидам уделялось много внимания. Глава 4 учебника геометрии для 7–9-го классов («Пирамида») посвящена изучению различных свойств этой удивительной фигуры.

4.5.1 ПИРАМИДА И ЕЁ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Дадим такое определение пирамиды:

Определение 39. Многогранник, одна грань которого – произвольный многоугольник, а все остальные – треугольники с общей вершиной, называется *пирамидой*.

Мы будем часто использовать понятие высоты пирамиды.

Определение 40. *Высотой пирамиды* называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на её основание. *Высотой пирамиды* называется также длина этого перпендикуляра.

Очень часто приходится иметь дело с *правильными пирамидами*.

Определение 41. Если основанием пирамиды является правильный многоугольник, а центр основания является и основанием высоты пирамиды, то пирамида называется *правильной*.

В правильной пирамиде все боковые рёбра равны между собой как наклонные с равными проекциями. Следовательно, боковыми гранями правильной пирамиды служат равнобедренные треугольники, равные между собой. Поэтому все плоские углы при вершине правильной пирамиды равны между собой.

Определение 42. Высота боковой грани, проведённая из вершины S правильной пирамиды, называется *апофемой пирамиды*.

Например, это высота SG в треугольнике ABS (рис. 4.29).

Во многих книгах по геометрии произвольную треугольную пирамиду называют *тетраэдром*. В нашем курсе мы так делать не будем. Термин «тетраэдр» у нас будет употребляться только для названия правильного многогранника с четырьмя гранями (об этом мы ещё поговорим в параграфе 4.9 «Правильные многогранники»).

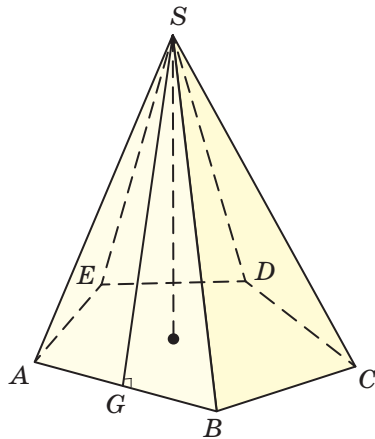


Рис. 4.29

Плоскость, проходящая через два несмежных боковых ребра пирамиды, называется *диагональной плоскостью*, а пересечение её с поверхностью пирамиды называется *диагональным сечением* пирамиды. Таково, например, сечение ACS (рис. 4.30).

Диагональными сечениями пирамиды служат треугольники с общей вершиной в вершине пирамиды. Основаниями этих треугольников служат диагонали основания пирамиды. Таковы треугольники ASC и ASD (рис. 4.30).

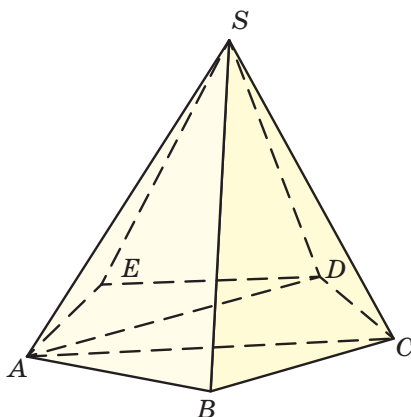


Рис. 4.30

Теорема 46. Если пересечь пирамиду плоскостью, параллельной её основанию, то:

- 1) боковые рёбра и высота пирамиды разделятся на пропорциональные между собой части;
- 2) сечение есть многоугольник, подобный основанию;
- 3) отношение площадей сечения и основания равно отношению квадратов их расстояний от вершины пирамиды.

Доказательство

Докажем п. 1.

1. Дана пирамида $SABCDE$ (рис. 4.31a), пересечённая плоскостью $A_1B_1C_1D_1E_1$, параллельной основанию пирамиды.

2. Используя свойства параллельных плоскостей, получим, что прямые AB и A_1B_1 параллельны, прямые BC и B_1C_1 параллельны (1, теорема 30).

3. Проведём высоту пирамиды SP , пересекающую плоскость сечения в точке P_1 , и соединим точки P и P_1 соответственно с точками A и A_1 (построение) (рис. 4.31б).

4. $\triangle ASP \sim \triangle A_1SP_1$ (1, 2, 3, признак подобия треугольников).

5. Из подобия треугольников ASP и A_1SP_1 имеем: $\frac{SP_1}{SP} = \frac{SA_1}{SA}$ (4, свойства подобных треугольников).

6. Аналогично из подобия треугольников SBP и SB_1P_1 , SCP и SC_1P_1 , и т.д. найдём:

$$\frac{SP_1}{SP} = \frac{SB_1}{SB}, \quad \frac{SP_1}{SP} = \frac{SC_1}{SC}, \quad \frac{SP_1}{SP} = \frac{SD_1}{SD}, \dots$$

7. Следовательно, $\frac{SP_1}{SP} = \frac{SA_1}{SA} = \frac{SB_1}{SB} = \frac{SC_1}{SC} = \dots$ (5, 6).

Докажем п. 2.

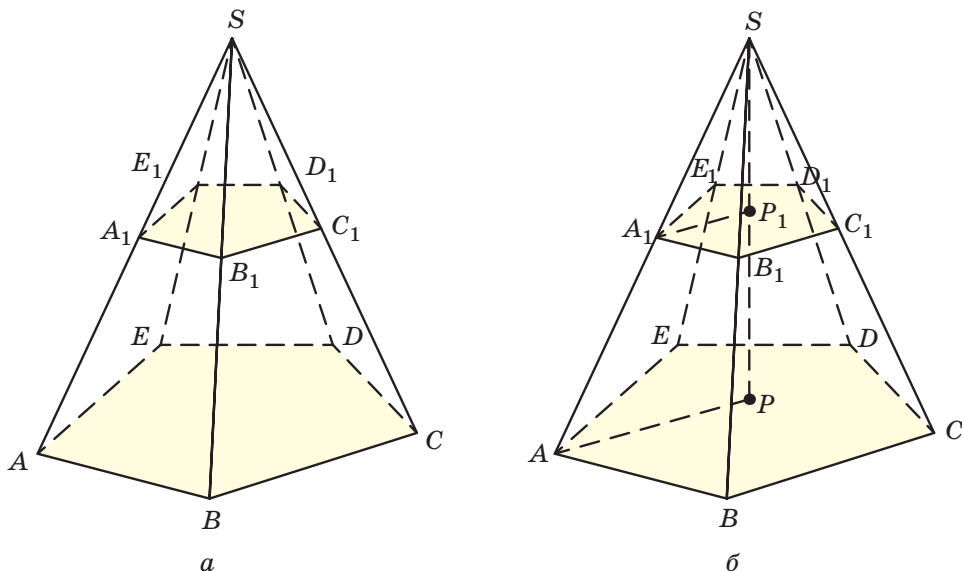


Рис. 4.31

8. Так как секущая плоскость параллельна плоскости основания пирамиды, то $AB \parallel A_1B_1$; $BC \parallel B_1C_1$; ... (1, свойства параллельных плоскостей).

9. Следовательно, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$, $\angle CDE = \angle C_1D_1E_1$,

Так как $\triangle A_1B_1S \sim \triangle ABS$, то $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1S}{AS} = \frac{P_1S}{PS}$ (8, свойство равных и подобных треугольников).

10. Так же найдём: $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{P_1S}{PS}$, $\frac{C_1D_1}{CD} = \frac{P_1S}{PS}$,

11. Следовательно, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \dots$ (7, 9, 10).

12. Многоугольники $A_1B_1C_1D_1E_1$ и $ABCDE$ подобны (9, 11, определение подобных многоугольников).

Докажем п.3.

13. По теореме о площадях подобных многоугольников имеем:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1E_1}}{S_{ABCDE}} = \frac{A_1B_1^2}{AB^2}.$$

14. Так как $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{P_1S}{PS}$, то $\frac{S_{A_1B_1C_1D_1E_1}}{S_{ABCDE}} = \frac{P_1S^2}{PS^2}$ (9, свойство площадей

подобных многоугольников). ■

4.5.3 ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ ПИРАМИДЫ

Определение 43. Сумма площадей боковых граней пирамиды называется *площадью её боковой поверхности* (или, кратко, *боковой поверхностью*). Сумма боковой поверхности и площади её основания называется *полной поверхностью пирамиды*.

Чтобы найти боковую поверхность пирамиды, нужно найти площадь каждой её боковой грани и взять сумму полученных площадей. Если же пирамида правильная, то её боковая поверхность может быть вычислена проще на основании следующей теоремы.

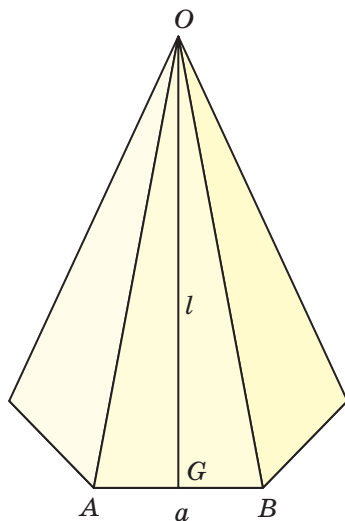


Рис. 4.32

Теорема 47. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению периметра её основания на половину апофемы.

1. Если a – сторона основания правильной пирамиды ($AB = a$), а l – её апофема ($OG = l$) (рис. 4.32), то площадь боковой грани равна $\frac{1}{2}al$, а сумма S площадей всех её n боковых граней равна $\frac{1}{2}nal$.

2. Но $na = P$, где P – периметр основания, следовательно, $S = \frac{Pl}{2}$ (1). ■

4.5.4 УСЕЧЁННАЯ ПИРАМИДА

Определение 44. Часть пирамиды, заключённая между её основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию, называется *усечённой пирамидой* (рис. 4.33).

Параллельные грани усечённой пирамиды называются её *основаниями*. Отрезок прямой, перпендикулярной к плоскостям оснований усечённой пирамиды, заключённый между этими плоскостями, называется *высотой* усечённой пирамиды. Основаниями усечённой пирамиды служат подоб-

ные многоугольники (как параллельные сечения пирамиды).

Определение 45. Усечённая пирамида называется *правильной*, если основаниями её служат правильные многоугольники, и прямая, соединяющая центры оснований, перпендикулярна плоскостям этих оснований.

Боковыми гранями правильной усечённой пирамиды служат равные между собой равнобедренные трапеции; высота каждой из них называется *апофемой усечённой пирамиды*.

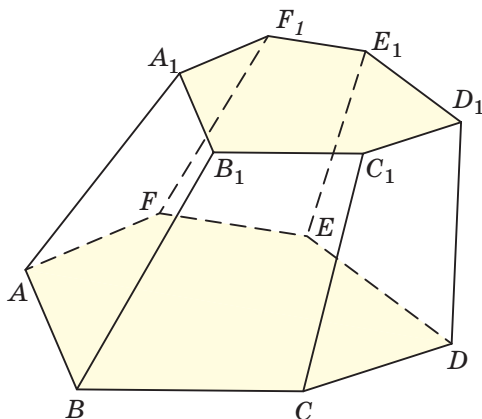


Рис. 4.33

Определение 46. Боковой поверхностью усечённой пирамиды называется сумма площадей её боковых граней. Полной поверхностью усечённой пирамиды называется сумма её боковой поверхности и площадей оснований.

Теорема 48. Боковая поверхность правильной усечённой пирамиды равна произведению полусуммы периметров её оснований на апофему.

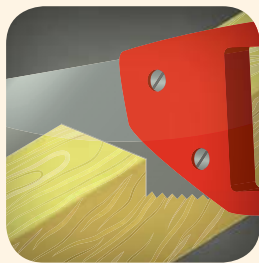
Доказательство

1. Если a – сторона нижнего основания, b – сторона верхнего основания, l – апофема данной усечённой пирамиды, то площадь её боковой грани равна $\frac{a+b}{2}l$, а сумма S площадей всех боковых граней равна $n \frac{a+b}{2}l = \frac{na+nb}{2}l$,

где n – число боковых граней.

2. $na = P$, где P – периметр нижнего основания, а $nb = Q$, где Q – периметр верхнего основания.

3. Поэтому $S = \frac{P+Q}{2}l$. ■



ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ И ПЛОСКОСТЕЙ. ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ



Мы неоднократно говорили о сечениях многогранников, но ни разу строго не обосновывали построение такого сечения. Исключением были случаи, когда сечения определены однозначно, например, диагональные сечения куба или призмы.

Сечением выпуклого многогранника является многоугольник. Чтобы построить его, нужно указать отрезки, по которым секущая плоскость пересекает грани многогранника. В зависимости от многогранника и расположения секущей плоскости в сечении могут получаться разные многоугольники.

ЗАДАЧА 1

На рёбрах AB , AD , CD треугольной пирамиды $ABCD$ выбраны соответственно точки M , N , P так, что прямые NP и AC не параллельны (рис.4.34а). Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через данные точки.

Решение

Построить сразу данное сечение невозможно. Опишем подробно все этапы этого построения.

Три точки M , N , P образуют плоскость, обозначим её α . Ясно, что искомое сечение является частью этой плоскости.

1. Плоскость α имеет с плоскостью DAC общие точки N и P , поэтому пересечением плоскостей DAC и α является прямая NP . Отрезок NP – пересечение грани DAC и плоскости α , значит, отрезок NP является одной из сторон искомого сечения (рис. 4.34б).

2. Продолжим ребро AC пирамиды до пересечения с лучом NP , получим точку K , которая также принадлежит плоскости сечения α (1,2) (рис. 4.34б).

3. Построим отрезок NM , принадлежащий грани ADB и плоскости α (рис. 4.34в) (1, 1, 2).

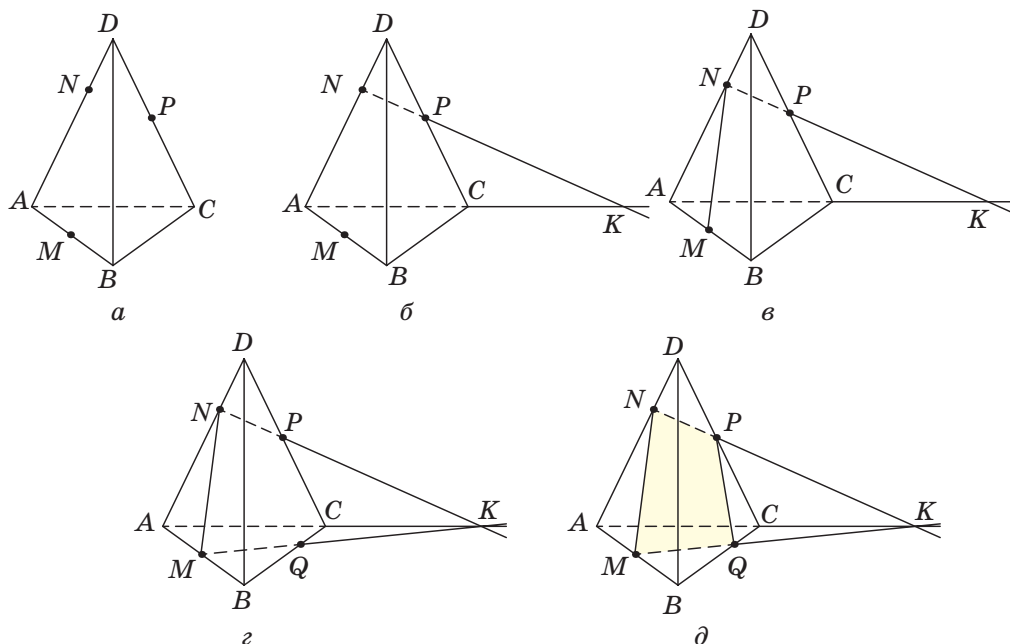


Рис. 4.34

Точка M принадлежит плоскости α и плоскости ABC ; для построения линии пересечения этих плоскостей достаточно иметь ещё одну их общую точку. Такой точкой является точка K пересечения прямых NP и AC .

4. Проведём прямую MK , получим точку Q на ребре BC (рис. 4.34г) (1, 2, 3, 5).

5. Проведём отрезок QP , который является ещё одной стороной искомого сечения.

6. Четырёхугольник $MNPQ$ – искомое сечение (рис. 4.34д). ■

ЗАДАЧА 2

На боковых рёбрах AA_1 , BB_1 , CC_1 четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ даны точки K , P , T (рис. 4.35а). Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через данные точки.

Решение

Анализ

Предположим, что задача решена и сечение построено. Как это можно сделать? Данные на рёбрах три точки определяют искомую плоскость, а значит, два ребра PT и PK искомой плоскости мы имеем, но вот как будет расположена остальная часть искомой плоскости, не ясно:

- а) она может пересекать два ребра нижнего основания призмы (рис. 4.35б);
 б) она может пересекать ещё одно боковое ребро (рис. 4.35в).

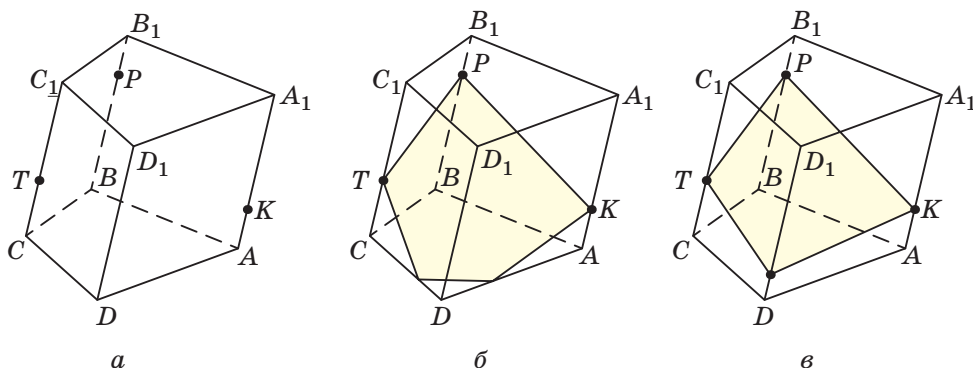


Рис. 4.35

Построение

1. Проведём прямые PK и PT , которые пересекут плоскость нижнего основания в точках M и N (рис. 4.36).
2. Точки M и N принадлежат плоскости основания призмы и секущей плоскости, а значит, прямая MN – линия пересечения этих плоскостей.

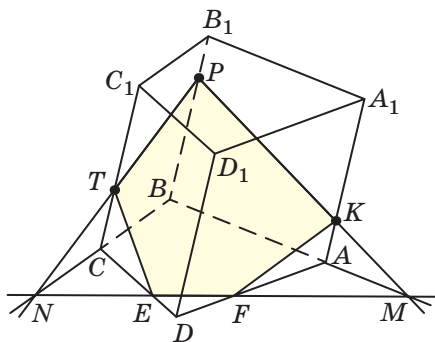


Рис. 4.36

3. Если MN пересекает стороны основания призмы в точках E и F , то пятиугольник $KPTEF$ – искомое сечение (рис. 4.36).

Мы получили решение для случая, когда MN пересекает стороны основания призмы. Но MN может и не пересекать этих сторон основания. Исследуем эту ситуацию.

Рассмотрим случай, изображённый на рис. 4.37а.

Если прямая MN не пересекает основание призмы (рис. 4.37а), находим точку Q пересечения прямых MN и AD , потом – точку E , в которой прямая KQ пересекает ребро DD_1 . Четырёхуголь-

ник $KPTE$ – искомое сечение (рис. 4.37а).

Если точки K, P, T расположены так, что $KP \parallel AB$ и, следовательно, точки пересечения этих прямых не существует, тогда проводим $MN \parallel AB$. Заканчиваем построение, как в предыдущем случае (рис. 4.37б).

Если же окажется, что $KP \parallel AB$ и $PT \parallel BC$, тогда секущая плоскость параллельна плоскости основания. В этом случае на ребре DD_1 отмечаем точку E , такую, что $KE \parallel AB$. Четырёхугольник $KPTE$ – искомое сечение. ■

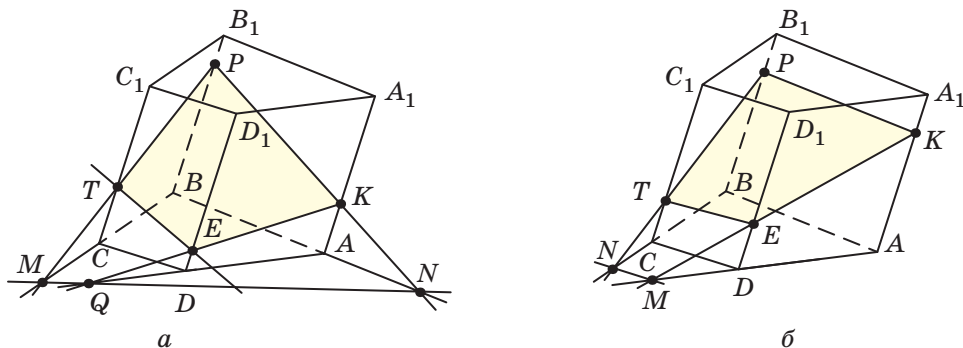


Рис. 4.37

Теперь рассмотрим довольно трудную, но очень поучительную задачу. Постарайтесь разобраться во всех этапах её решения.

ЗАДАЧА 3

На плоскости даны три луча, исходящие из одной точки (рис. 4.38а) и делящие плоскость на три угла, каждый из которых меньше 180° . В каждом из трёх углов дано по одной точке: A_1, B_1, C_1 – так, что эти точки не лежат на одной прямой. Требуется построить треугольник ABC , вершины которого лежат на данных лучах, а стороны проходят через данные точки.

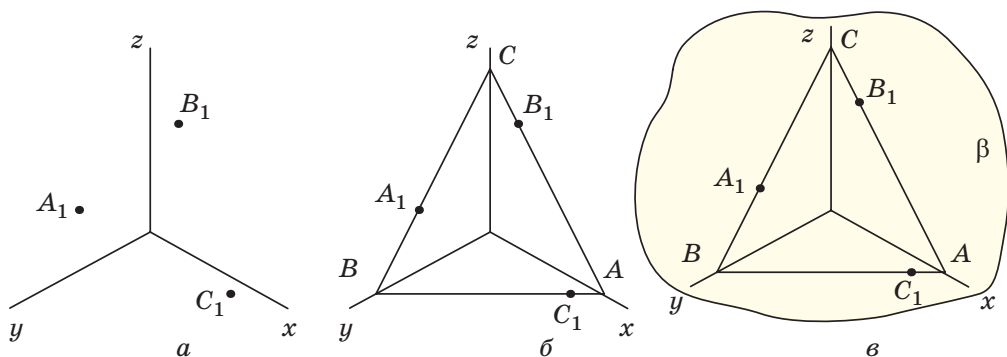


Рис. 4.38

Решение

Анализ

Предположим, что задача решена и нужный нам треугольник ABC построен (рис. 4.38б). Мы изобразили некоторый треугольник, стороны которого проходят через точки A_1, B_1, C_1 .

Как точно построить такой треугольник, т.е. определить положение его вершин A , B и C ?

Первая идея. Обычно задачи, сформулированные для точек плоскости, решаются в этой плоскости, а решение задач в пространстве часто сводят к изображению фигур на плоском чертеже. Такие приёмы решения задач или доказательства теорем никого не удивляют, они привычны. А вот задачу, сформулированную для фигур, расположенных в некоторой плоскости, решать пространственным трёхмерным способом – это уже необычно и любопытно. Конечно, этот метод подходит далеко не для всех задач.

Рассматриваемую задачу на плоскости решить трудно, а вот в пространстве она решается довольно легко. Представим себе, что мы имеем дело с изображением на плоскости некоторого трёхгранного угла, образованного лучами Ox , Oy , Oz с вершиной в точке O . Точки A_1 , B_1 , C_1 будем считать лежащими в гранях этого трёхгранного угла. Эти точки определяют некоторую плоскость. Обозначим её β (рис. 4.38в).

Плоскость β пересечет грани трёхгранного угла по некоторым отрезкам BC , CA и AB . Решение задачи сводится к построению линии пересечения плоскостей граней трёхгранного угла с плоскостью β .

Построение

Исходим из данных задачи (рис. 4.38, а).

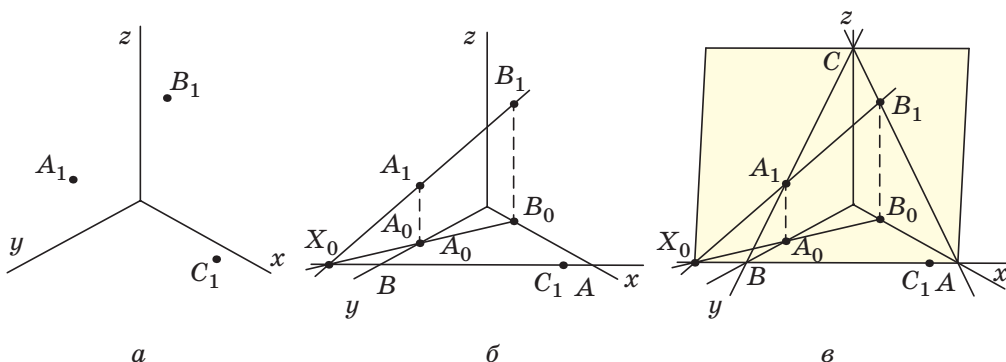


Рис. 4.39

1. Мы можем провести одну прямую, принадлежащую искомой плоскости β ; проведём прямую A_1B_1 (рис. 4.39б).

Вторая идея. Для нахождения нужных нам линий пересечения (плоскости β с гранями трёхгранного угла) воспользуемся параллельной проекцией точек A_1 и B_1 (а значит, и прямой A_1B_1) на плоскость xOy .

2. Спроектируем точки A_1 и B_1 на плоскость xOy параллельно лучу Oz . Точки A_1 , B_1 , C_1 перейдут соответственно в точки A_0 , B_0 , C_1 (точка C_1 останется на месте) (рис. 4.39в).

3. Находим точку X_0 пересечения прямой A_1B_1 с плоскостью xOy , это будет точка пересечения прямых A_1B_1 и A_0B_0 (рис. 4.39б).

4. Точки X_0 и C_1 лежат и в искомой плоскости, и в плоскости xOy , следовательно, искомая плоскость пересечёт плоскость xOy по прямой X_0C_1 . Проведём прямую X_0C_1 , она пересечет лучи Ox и Oy в точках A и B – искомым вершинам треугольника (1, 3, A_1) (рис. 4.39б).

5. Проведём прямые BA_1 и AB_1 , получим в пересечении с лучом Oz третью точку – вершину C искомого треугольника ABC (рис. 4.39в).

Итак, мы построили искомым треугольник в предположении, что имеем дело с изображением трёхгранного угла на плоскости.

Но можно выполнять точно такие же построения на плоскости и без этого предположения, получив в результате решение. Обоснуйте самостоятельно такое построение. ■

§ 4.7



ТРЁХГРАННЫЕ И МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ И СВОЙСТВА ИХ ПЛОСКИХ УГЛОВ

Мы уже знакомились с понятиями трёхгранного и многогранного углов в учебнике для 7–9-го классов (§ 2.3. «Что такое трёхгранный угол?» и § 2.4. «Многогранные углы»).

Напомним определение многогранного угла.

Определение 47. Пусть даны многоугольник $ABC\dots$ (назовём его для краткости F) и точка S , не принадлежащая его плоскости (рис. 4.40а). Объединение всех лучей, имеющих общее начало S и пересекающих данный многоугольник F (рис. 4.40б), называется *многогранным углом*.

Точка S называется *вершиной* многогранного угла, лучи SA , SB , ... – его *рёбрами*. Углы ASB , BSC , ... называются *гранями* многогранного угла или его *плоскими углами*. Величина каждого из них принадлежит промежутку от 0° до 180° .

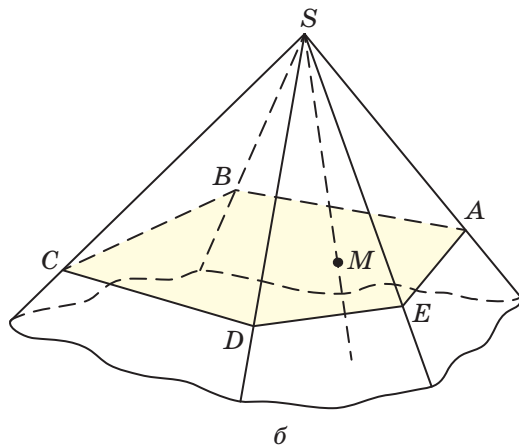
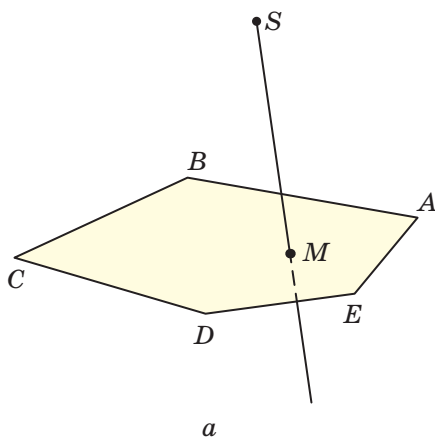


Рис. 4.40

Нами также было доказано *основное свойство трёхгранных углов*: любой плоский угол трёхгранного угла меньше суммы остальных его плоских углов. Теперь мы докажем ещё несколько свойств.

Теорема 49. В трёхгранном угле сумма плоских углов меньше 360° .

Доказательство

1. Дан трёхгранный угол $OABC$ с плоскими углами α, β, γ (рис. 4.41а).
2. Требуется доказать, что $\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$.
3. Проведём луч OA_1 , дополняющий луч OA до прямой (построение (рис. 4.41б)).
4. В трёхгранном угле OA_1BC плоские углы равны: $\alpha, 180^\circ - \beta, 180^\circ - \gamma$ (1, 3, свойства трёхгранных углов).
5. (2) Применив основное свойство трёхгранного угла, получим $\alpha < (180^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma)$ или $\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$. ■

Теорема 50. В трёхгранном угле каждый плоский угол больше разности двух других плоских углов.

Доказательство

1. Дан трёхгранный угол $SMNP$ (рис. 4.41в).
2. Требуется доказать, что каждый плоский угол трёхгранного угла больше разности двух других плоских углов.
3. Обозначим через C некоторую точку ребра SN трёхгранного угла $SMNP$. Пусть, для определённости, $\angle ASB \geq \angle ASC$ (рис. 4.41г).
4. Выберем в плоскости грани MSP точку C_1 так, что $SC_1 = SC$, $\angle MSC_1 = \angle ASC$ (рис. 4.41г).

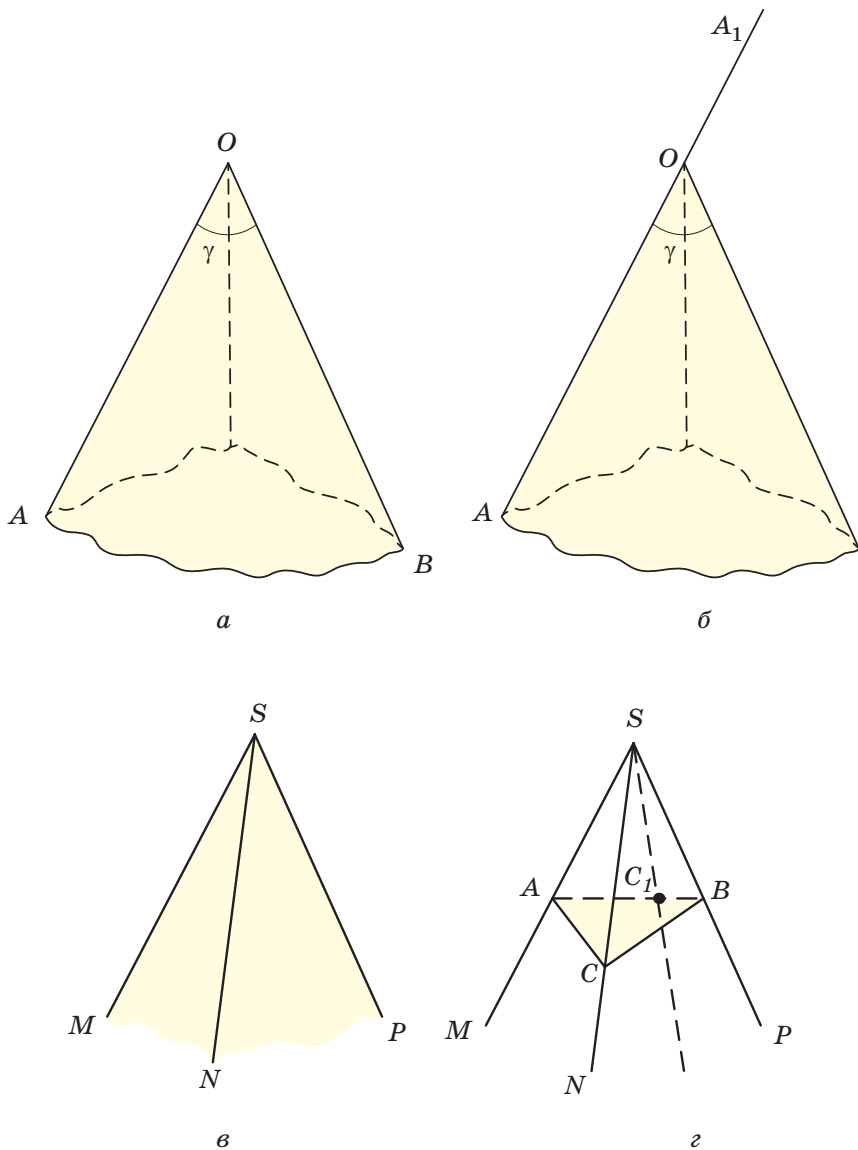


Рис. 4.41

5. Предположим, что плоскость, проходящая через точки C и C_1 , пересекает рёбра MS и PS в точках A и B соответственно. Обратите внимание на то, что «основание» ABC трёхгранного угла не было жёстко закреплено, т.е. его вершины можно двигать вдоль соответствующих рёбер. Именно потому и существует точка C_1 , удовлетворяющая указанным выше условиям.

6. $\triangle ASC_1 = \triangle ASC$ (1, 3, 4, признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними).

7. Следовательно, $AC_1 = AC$, $C_1B = AB - AC_1 = AB - AC < BC$ (6, свойства равных треугольников).

8. Рассмотрим теперь треугольники C_1SB и BSC . У этих треугольников $SC = C_1S$, сторона BS – общая и $C_1B < BC$, поэтому $\angle BSC > \angle BSC_1 = \angle ASB - \angle ASC$ (6, 7).

9 (2). Два других неравенства доказываются аналогично. ■

Свойства плоских углов выпуклого многогранного угла аналогичны свойствам трёхгранного угла:

1. Величина каждого плоского угла многогранного угла меньше суммы величин остальных его плоских углов.

2. В выпуклом многогранном угле сумма величин плоских углов меньше 360° .

Докажите эти свойства самостоятельно.

§ 4.8*



ТЕОРЕМЫ КОСИНУСОВ И СИНУСОВ ДЛЯ ТРЁХГРАННЫХ УГЛОВ



В этом параграфе мы выведем формулы, связывающие между собой величины плоских углов трёхгранного угла и величины двугранных углов, а также применим выведение формулы к решению задач.

Теорема 51 (первая теорема косинусов для трёхгранного угла). Для трёхгранного угла, плоские углы которого равны α , β и γ , а противолежащие им двугранные углы соответственно равны A , B , C , имеет место равенство:

$$\cos \alpha = \cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos A.$$

Замечание. Иногда первую теорему косинусов для трёхгранного угла записывают в виде: $\cos A = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}$, позволяющем непосредственно находить двугранные углы по известным плоским углам.

Доказательство

1. $SABC$ – трёхгранный угол, у которого величины плоских углов равны $\angle BSC = \alpha$, $\angle ASC = \beta$, $\angle ASB = \gamma$, а величины противоположащих им двугранных углов соответственно равны A, B, C (дано).

2. $\cos \alpha = \cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos A$ (требуется доказать).

3. Рассмотрим сначала случай, когда оба угла β и γ – острые. Выберем на ребре SA точку M так, чтобы $SM = 1$, и проведём через точку M плоскость, перпендикулярную ребру SA . Пусть эта плоскость пересечёт ребро SB в точке K , а ребро SC – в точке P (рис. 4.42) (построение).

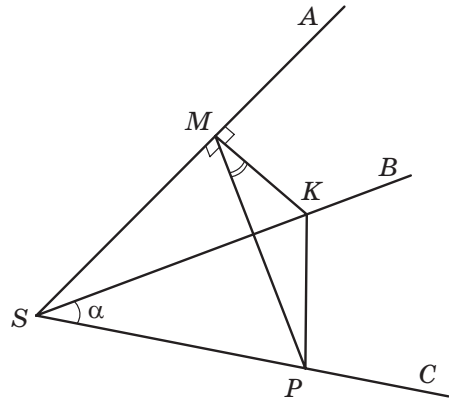


Рис. 4.42

4. Угол KMP является линейным углом двугранного угла $BSAC$, т.е. имеет величину A . По теореме косинусов для треугольника KMP : $KP^2 = MK^2 + MP^2 - 2 \cdot MK \cdot MP \cdot \cos A$.

5. По теореме косинусов для треугольника KSP :

$$KP^2 = SK^2 + SP^2 - 2 \cdot SK \cdot SP \cdot \cos \alpha.$$

6. Из прямоугольного треугольника SMP с катетом $SM = 1$ находим:

$$MP = \operatorname{tg} \beta, \quad SP = \frac{1}{\cos \beta}, \quad \text{а из прямоугольного треугольника } SMK \text{ с катетом } SM = 1 \text{ находим: } MK = \operatorname{tg} \gamma, \quad SK = \frac{1}{\cos \gamma}.$$

7. Подставляя выражения из п. 6 в правые части равенств из п.п. 4 и 5 и приравнявая их, получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 \beta} + \frac{1}{\cos^2 \gamma} - \frac{2 \cos \alpha}{\cos \beta \cos \gamma} &= \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \gamma - 2 \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot \cos A, \\ 1 + \operatorname{tg}^2 \beta + 1 + \operatorname{tg}^2 \gamma - \frac{2 \cos \alpha}{\cos \beta \cdot \cos \gamma} &= \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \gamma - \frac{2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos A}{\cos \beta \cdot \cos \gamma}. \end{aligned}$$

8 (2, 3). После приведения подобных членов получим равенство:

$$2 - \frac{2 \cos \alpha}{\cos \beta \cdot \cos \gamma} = - \frac{2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos A}{\cos \beta \cdot \cos \gamma}.$$

Умножая обе его части на $\frac{\cos \beta \cdot \cos \gamma}{2}$, получим: $\cos \beta \cdot \cos \gamma - \cos \alpha = - \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos A$, откуда следует доказываемое равенство $\cos \alpha = \cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos A$.

9. Случай, когда среди углов β или γ имеется один или несколько тупых или прямых, рассматриваются аналогично. Сделайте это самостоятельно. ■

Для доказательства следующей теоремы нам понадобится новое понятие, которое применяется и во многих других ситуациях, связанных с трёхгранными углами.

Определение 48. Трёхгранным углом, *полярным* данному трёхгранному углу $SABC$, называется трёхгранный угол $S_1A_1B_1C_1$, вершина которого – произвольная точка S_1 внутри данного трёхгранного угла, а его лучи перпендикулярны граням данного, а именно: $S_1A_1 \perp SBC$, $S_1B_1 \perp SAC$, $S_1C_1 \perp SAB$ (рис. 4.43а).

Во-первых, заметим, что при другом выборе точки S_1 внутри данного трёхгранного угла $SABC$ получится трёхгранный угол, лучи которого параллельны и сонаправлены лучам трёхгранного угла $S_1A_1B_1C_1$. В этом смысле можно сказать, что плоские и двугранные углы полярного трёхгранного угла определяются единственным образом.

Во-вторых, легко убедиться, что понятие полярного трёхгранного угла является взаимным, т.е. если трёхгранный угол $S_1A_1B_1C_1$ является полярным для трёхгранного угла $SABC$, то трёхгранный угол $SABC$ является полярным для трёхгранного угла $S_1A_1B_1C_1$. Это следует из того, что, скажем, плоскость $S_1A_1C_1$, проходящая через перпендикуляры S_1A_1 и S_1C_1 к плоскостям SBC и SAB соответственно, перпендикулярна каждой из этих плоскостей, а следовательно, перпендикулярна и линии их пересечения – прямой SB (рис. 4.43а).

И, наконец, в-третьих, плоские углы полярного трёхгранного угла в сумме с соответственными двугранными углами начального трёхгранного угла дают по 180° . Точнее, если $SABC$ – трёхгранный угол, у которого величины плоских углов равны $\angle BSC = \alpha$, $\angle ASC = \beta$, $\angle ASB = \gamma$, величины противолежащих им двугранных углов соответственно равны A , B , C , а $S_1A_1B_1C_1$ – полярный ему трёхгранный угол, у которого величины плоских углов равны $\angle B_1S_1C_1 = \alpha_1$, $\angle A_1S_1C_1 = \beta_1$, $\angle A_1S_1B_1 = \gamma_1$, величины противолежащих им двугранных углов соответственно равны A_1 , B_1 , C_1 , то $\alpha_1 + A = 180^\circ$, $\beta_1 + B = 180^\circ$, $\gamma_1 + C = 180^\circ$. Кроме того, из предыдущего замечания о взаимности понятия полярного трёхгранного угла вытекает справедливость равенств $\alpha + A_1 = 180^\circ$, $\beta + B_1 = 180^\circ$, $\gamma + C_1 = 180^\circ$.

Проверим справедливость второго из выписанных равенств, $\beta_1 + B = 180^\circ$. Пусть плоскость $S_1A_1C_1$ пересекает луч SB в точке M (рис. 4.43б). Так как плоскость $S_1A_1C_1$ проходит через перпендикуляры S_1A_1 и S_1C_1 к плоскостям SBC и SAB соответственно, то она перпендикулярна каждой из этих плоскостей, а следовательно, перпендикулярна и линии их пересечения – прямой SB . Отсюда следует, что угол C_1MA_1 – линейный угол двугранного угла с ребром SB , т.е. $\angle C_1MA_1 = B$. Поскольку в четырёхугольнике $S_1A_1MC_1$ углы S_1A_1M и S_1C_1M – прямые, то $\angle A_1S_1C_1 + \angle A_1MC_1 = \beta_1 + B = 180^\circ$, что и требовалось проверить.

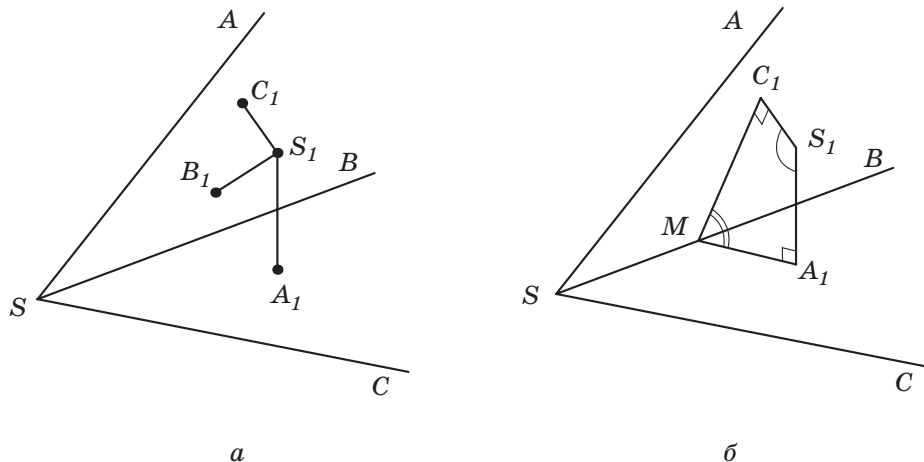


Рис. 4.43

Теорема 52 (вторая теорема косинусов для трёхгранного угла). Для трёхгранного угла, плоские углы которого равны α , β и γ , а противолежащие им двугранные углы соответственно равны A , B , C , имеет место равенство:

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos \alpha.$$

Замечание. Иногда вторую теорему косинусов для трёхгранного угла записывают в виде: $\cos \alpha = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$, позволяющем непосредственно находить плоские углы по известным двугранным углам.

Доказательство

1. $SABC$ – трёхгранный угол, у которого величины плоских углов равны $\angle BSC = \alpha$, $\angle ASC = \beta$, $\angle ASB = \gamma$, а величины противолежащих им двугранных углов соответственно равны A , B , C (дано).

2. $\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos \alpha$ (требуется доказать).

3. Рассмотрим трёхгранный угол $S_1A_1B_1C_1$, полярный для трёхгранного угла $SABC$, у которого величины плоских углов равны $\angle B_1S_1C_1 = \alpha_1$, $\angle A_1S_1C_1 = \beta_1$, $\angle A_1S_1B_1 = \gamma_1$, а величины противолежащих им двугранных углов соответственно равны A_1 , B_1 , C_1 , и запишем для него первую теорему косинусов: $\cos \alpha_1 = \cos \beta_1 \cdot \cos \gamma_1 + \sin \beta_1 \cdot \sin \gamma_1 \cdot \cos A_1$ (Т. 51).

4(2). Подставим в последнее равенство $\alpha_1 = 180^\circ - A$, $\beta_1 = 180^\circ - B$, $\gamma_1 = 180^\circ - C$, $\alpha = 180^\circ - A_1$. С учётом того, что $\cos (180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi$, $\sin (180^\circ - \varphi) = \sin \varphi$, получим:

$$-\cos A = (-\cos B) \cdot (-\cos C) + \sin B \cdot \sin C \cdot (-\cos \alpha), \text{ или}$$

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos \alpha, \text{ что и требовалось. } \blacksquare$$

Теорема 53 (теорема синусов для трёхгранного угла). Для трёхгранного угла, плоские углы которого равны α , β и γ , а противолежащие им двугранные углы соответственно равны A , B , C , имеет место равенство:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C}.$$

Доказательство

1. $SABC$ – трёхгранный угол, у которого величины плоских углов равны $\angle BSC = \alpha$, $\angle ASC = \beta$, $\angle ASB = \gamma$, а величины противолежащих им двугранных углов соответственно равны A , B , C (дано).

2. $\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C}$ (требуется доказать).

3. Выберем на ребре SA точку M так, чтобы $SM = 1$, и проведём из точки перпендикуляр ME к плоскости SBC . Рассмотрим сначала случай, когда основание E этого перпендикуляра лежит внутри угла BSC . Проведём из точки E перпендикуляры EH и EK к сторонам SB и SC угла BSC соответственно (рис. 4.44) (построение).

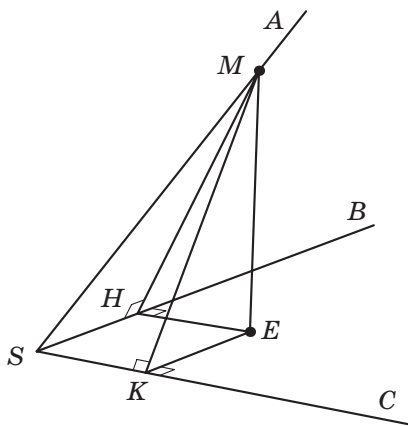


Рис. 4.44

4. По теореме о трёх перпендикулярах $MH \perp SB$, а $MK \perp SC$ (3, Т 18).

5. Угол MKE является линейным углом двугранного угла $ASCB$, т.е. имеет величину C , поэтому из прямоугольного треугольника MKE $ME = MK \cdot \sin C$, а поскольку из прямоугольного треугольника SMK $MK = SM \cdot \sin \beta = \sin \beta$, то $ME = \sin \beta \cdot \sin C$ (1, 3, 4).

6. Аналогично п. 5 угол MHE является линейным углом двугранного угла $ASBC$, т.е. имеет величину B , поэтому из прямоугольного треугольника MHE $ME = MH \cdot \sin B$, а поскольку из прямоугольного треугольника SMH $MH = SM \cdot \sin \gamma = \sin \gamma$, то $ME = \sin \gamma \cdot \sin B$ (1, 3, 4).

7. Так как $ME = \sin \beta \cdot \sin C$ и одновременно $ME = \sin \gamma \cdot \sin B$, то заключаем, что $\sin \beta \cdot \sin C = \sin \gamma \cdot \sin B$, откуда $\frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C}$ (5, 6).

8(2, 3). Аналогично п. 7 устанавливаем, что $\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B}$, откуда получаем требуемое $\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C}$.

9. Случай, когда точка E не лежит внутри угла SBC , рассматривается аналогично. Сделайте это самостоятельно. ■



ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

В учебнике геометрии для 7–9-го классов мы немного говорили о правильных многогранниках. Сейчас рассмотрим их более подробно.

4.9.1 ПОНЯТИЕ ПРАВИЛЬНОГО МНОГОГРАННИКА

Определение 49. Многогранник называется *правильным*, если все его грани – равные правильные многоугольники и все его многогранные углы имеют одинаковое число граней.

Из определения следует, что все рёбра правильного многогранника равны, а также равны все его плоские углы.

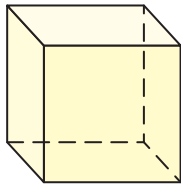
Примеры правильных многогранников вам уже известны: это куб (рис. 4.45а) и тетраэдр (рис. 4.45б). Можно доказать, что существует ещё три вида правильных многогранников. Это правильный восьмигранник (или октаэдр) (рис. 4.45в), правильный двадцатигранник (икосаэдр) (рис. 4.45г), правильный двенадцатигранник (додекаэдр) (рис. 4.45д). Никаких других видов выпуклых правильных многогранников, кроме пяти перечисленных, не существует (это открытие приписывается древнегреческому философу Платону).

Развёртки поверхностей правильных многогранников всех видов изображены на рис. 4.46.

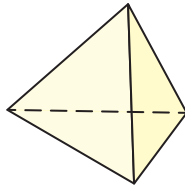
Покажем, что существует не более пяти видов правильных многогранников.

1. Предположим, что гранями правильного многогранника являются правильные n -угольники, а из каждой вершины выходит m рёбер.

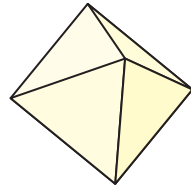
2. Так как угол правильного n -угольника равен $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$, то сумма плоских углов при вершине любого m -гранного угла равна $\frac{180^\circ m(n-2)}{n}$



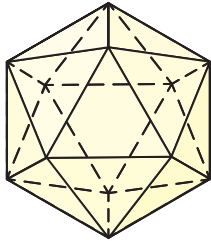
a



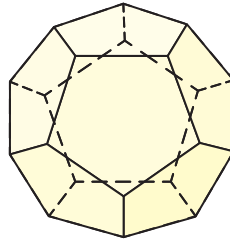
б



в

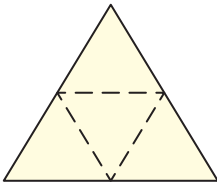


з

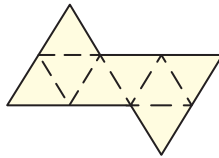


д

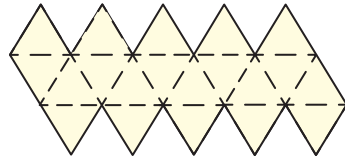
Рис. 4.45



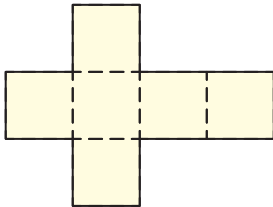
a



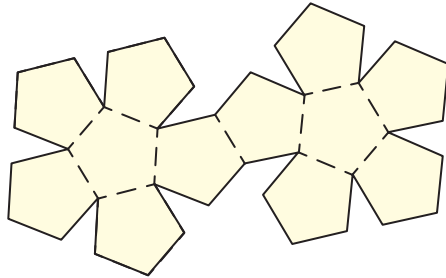
б



в



з



д

Рис. 4.46

3. Но нам известно, что сумма плоских углов любого многогранного угла меньше 360° , поэтому $\frac{180^\circ m(n-2)}{m} < 360^\circ$, или $mn < 2m + 2n$.

4. Из п.3 находим, что $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$.

5. Решим полученное неравенство в натуральных числах.

6. Поскольку $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, то $m < 6$ и $n < 6$.

7. Далее, если $m = n = 4$, то $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

8. Значит, хотя бы одно из чисел m или n равно 3 (очевидно, что $m \geq 3$ и $n \geq 3$), так как число рёбер многогранного угла и число сторон плоского многоугольника не может быть меньше трех.

9. Итак, возможны всего пять случаев: 1) $m = n = 3$; 2) $m = 3, n = 4$; 3) $m = 3, n = 5$; 4) $m = 4, n = 3$; 5) $m = 5, n = 3$.

4.9.2* ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА



Гениальный математик XVIII столетия Леонард Эйлер доказал в 1758 г., что число граней, число вершин и число рёбер выпуклого многогранника связаны простым соотношением.

Теорема 54. Пусть G – число граней, V – число вершин и P – число рёбер произвольного выпуклого многогранника. Тогда $G + V - P = 2$.

Мы не будем доказывать здесь эту теорему, а ограничимся проверкой её справедливости для тетраэдра, куба и октаэдра:

- а) тетраэдр: $G = 4, V = 4, P = 6$; $4 + 4 - 6 = 2$;
- б) куб: $G = 6, V = 8, P = 12$; $6 + 8 - 12 = 2$;
- в) октаэдр: $G = 8, V = 6, P = 12$; $8 + 6 - 12 = 2$.

4.9.3* ПОСТРОЕНИЕ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ



а) Построение куба

1. Для построения куба берём произвольную плоскость α и в ней какой-либо квадрат; через стороны этого квадрата проводим плоскости, перпендикулярные к плоскости α .
2. Таких плоскостей будет четыре.
3. Далее проводим плоскость β , параллельную плоскости α и отстоящую от неё на расстоянии, равном стороне квадрата.
4. Шесть полученных плоскостей образуют грани куба.
5. Двенадцать прямых пересечения каждой пары пересекающихся плоскостей являются рёбрами куба, а восемь точек пересечения каждой тройки пересекающихся плоскостей служат вершинами куба. В этом легко убедиться непосредственно, рассматривая полученную совокупность точек, прямых и плоскостей.

Умея построить куб, легко найти способ построения всех других правильных многогранников.

б) Построение тетраэдра

1. Пусть дан куб (рис. 4.47)
2. Возьмём какую-либо его вершину, например A . В ней сходятся три грани куба, имеющие форму квадратов.
3. В каждом из этих квадратов берём вершину, противоположную точке A . Пусть это будут вершины куба B , C и D .
4. Точки A , B , C и D служат вершинами тетраэдра.
5. Действительно, каждый из отрезков AB , BC , CD , AD , BD и AC , очевидно, служит диагональю одной из граней куба, а потому все эти отрезки равны между собой.
6. Отсюда следует, что в треугольной пирамиде с вершиной A и основанием BCD все грани – правильные треугольники, следовательно, эта пирамида – правильный тетраэдр. Этот тетраэдр вписан в данный куб.
7. Полезно заметить, что оставшиеся четыре вершины куба служат вершинами второго правильного тетраэдра, равного первому и также вписанного в данный куб.

в) Построение октаэдра

Если в данном кубе построить центры всех его граней, то шесть полученных точек служат вершинами октаэдра. В этом легко убедиться, рассматривая рис. 4.48.

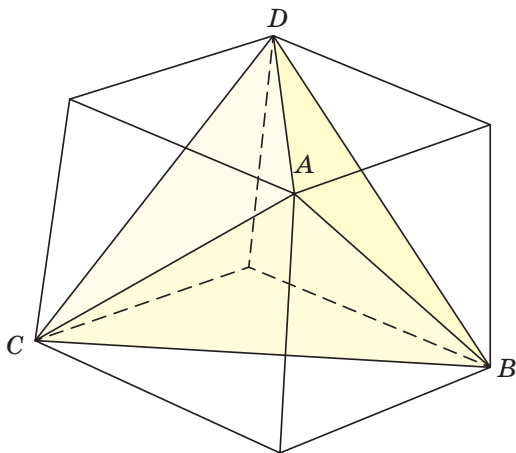


Рис. 4.47

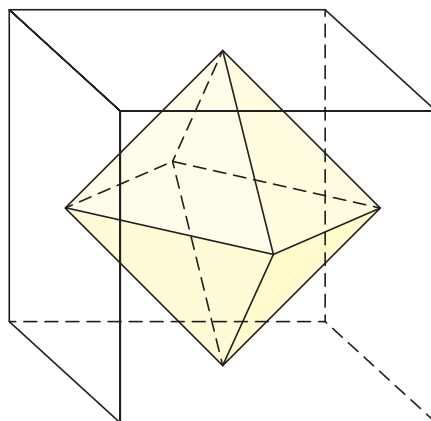


Рис. 4.48

г) Построение додекаэдра

1. Если через каждое из двенадцати рёбер куба провести плоскость, не имеющую с поверхностью куба других общих точек, кроме точек этого ребра, то полученные 12 плоскостей образуют грани некоторого 12-гранника.
2. Более подробное изучение формы этого многогранника показывает, что можно так подобрать наклон этих плоскостей к граням куба, что грани этого

12-гранника будут правильными пятиугольниками, а сам 12-гранник будет додекаэдром (рис. 4.49).

д) Построение икосаэдра

Если мы умеем построить додекаэдр, то построение икосаэдра не представляет затруднений: центры граней додекаэдра служат вершинами икосаэдра (рис. 4.50)

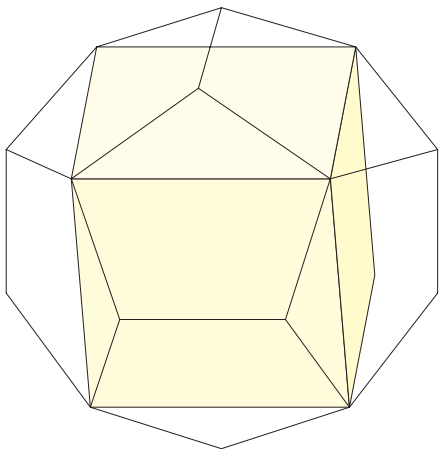


Рис. 4.49

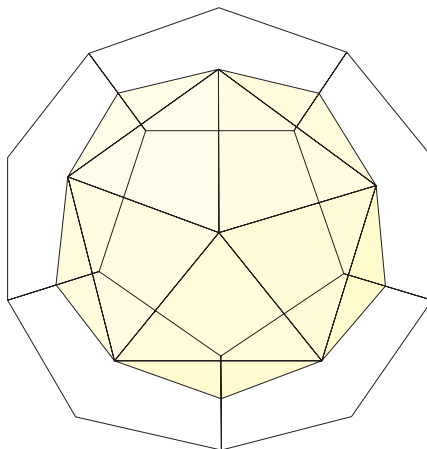


Рис. 4.50

4.9.4 ЦЕНТР ПРАВИЛЬНОГО МНОГОГРАННИКА

Все диагонали куба между собой равны, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам. Следовательно, точка пересечения диагоналей куба равноудалена от всех его вершин. Эта точка называется *центром куба*. Легко видеть, что других точек, равноудалённых от всех вершин, куб не имеет.

В тетраэдре также существует единственная точка, равноудалённая от всех вершин. Такой точкой будет центр того куба, с помощью которого мы строили тетраэдр (рис. 4.47). То же имеет место и для октаэдра (рис. 4.48).

Более подробное проведение рассуждений, относящихся к додекаэдру и к икосаэдру, показывает, что как в додекаэдре, так и в икосаэдре также существует единственная точка, равноудалённая от всех вершин. В додекаэдре такой точкой будет центр того куба, с помощью которого строится додекаэдр (рис. 4.49), в икосаэдре – центр соответствующего додекаэдра (рис. 4.50).

Итак, во всяком правильном многограннике существует единственная точка, равноудалённая от всех его вершин.

Точка, равноудалённая от всех вершин правильного многогранника, называется *центром правильного многогранника*.

Можно доказать, что центр правильного многогранника равноудалён от всех его граней.

ЗАДАЧИ К § 4.1

Н



- 1** Какое наименьшее число рёбер может быть у многогранника? Какое наименьшее число граней?

П

- 2** Докажите, что не существует многогранника с нечётным числом граней, все грани которого являются многоугольниками с нечётным числом сторон.
- 3** Докажите, что у любого многогранника число граней с нечётным числом сторон чётно.
- 4** Докажите, что у любого многогранника число вершин, в которых сходится нечётное число рёбер, чётно.
- 5** Существует ли многогранник, все сечения которого – треугольники?
- 6** Докажите, что не существует выпуклого многогранника, имеющего семь рёбер.
- 7** Докажите, что для любого $k > 7$ существует многогранник с k рёбрами.

ЗАДАЧИ К § 4.2

Куб и его свойства

Н



- 8** Вершина A куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ соединена отрезками с его остальными вершинами. Какие из построенных отрезков лежат в одной плоскости с отрезком $A_1 C$?
- 9** Может ли в сечении куба плоскостью получиться: а) прямоугольник; б) ромб; в) параллелограмм?
- 10** Может ли в сечении куба плоскостью получиться пятиугольник?
- 11** Может ли в сечении куба плоскостью получиться шестиугольник?

- 12** Может ли в сечении куба плоскостью получиться многоугольник с числом сторон больше шести?
- 13** Какие правильные многоугольники могут быть получены при пересечении куба плоскостью?
- 14** Точки M и N – середины рёбер AA_1 и CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Определите вид четырёхугольника $MBND_1$.

П

- 15** Боковые грани деревянного куба с ребром 10 см покрыли краской, а затем этот куб разрезали на кубики с ребром 2 см. Сколько получилось кубиков: а) с двумя окрашенными гранями; б) с одной окрашенной гранью; в) не имеющих окрашенных граней?
- 16** Решите предыдущую задачу при условии, что окрашены все грани куба.
- 17** Какие размеры может иметь прямоугольный лист бумаги, если известно, что из него можно вырезать развёртку куба с ребром 4 см?
- 18** $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб, точка B_2 – середина отрезка BB_1 . Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки A , B_2 и C .
- 19** Через середины M и N рёбер AB и AD и через вершину C_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена плоскость. Постройте сечение куба плоскостью и вычислите площадь сечения, если ребро куба равно a .
- 20** На рёбрах (и их продолжении) куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ даны точки K , P и M (рис. 4.51). Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через эти точки.
- 21** Постройте сечение куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через середины рёбер AB и AD и параллельной прямой CC_1 . Найдите периметр сечения, если $AB = 1$.
- 22** Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб. Постройте его сечение плоскостью KLM при таком расположении этих точек: а) K лежит внутри ребра $A_1 D_1$, L лежит внутри ребра $A_1 B_1$, M лежит внутри ребра AD ; б) K лежит внутри ребра $A_1 B_1$, L лежит внутри ребра $A_1 D_1$, M лежит внутри ребра CD ; в) K лежит внутри ребра $A_1 B_1$, L лежит внутри ребра $A_1 B_1$, L лежит внутри ребра $A_1 D_1$, M лежит внутри ребра CC_1 ; д) K лежит внутри ребра $A_1 B_1$, L лежит внутри ребра DD_1 , M лежит внутри ребра BC .
- 23** Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через концы трёх рёбер, выходящих из одной вершины. Найдите периметр и площадь сечения, если ребро куба равно a .

24 Дан куб $ABCA_1B_1C_1D_1$. Через точку M , принадлежащую ребру AC_1 , проведена плоскость σ , перпендикулярная диагонали AC_1 . Вычислите площадь S сечения, если $AM = x$, а ребро куба равно m .

25 Деревянный куб распиливают так, что пила проходит через точки K , P , T , как показано на рис. 4.52. Что за фигура получится в сечении?

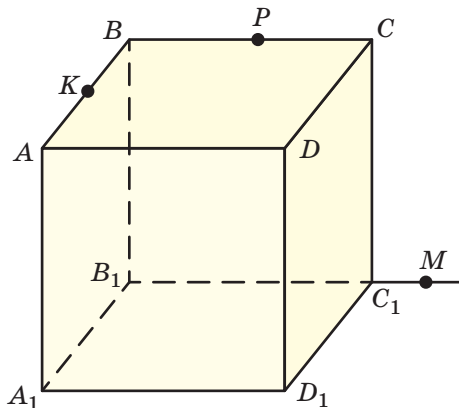


Рис. 4.51

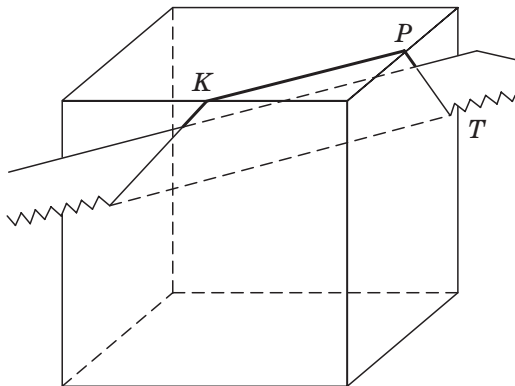


Рис. 4.52

М

26 Точки M , P и K — середины рёбер куба соответственно A_1B_1 , B_1C_1 и AD . Постройте пересечение куба с плоскостью MPK . Докажите, что это пересечение представляет собой правильный шестиугольник.

27 Точки M и P принадлежат рёбрам куба $ABCA_1B_1C_1D_1$: точка M — ребру AA_1 , точка P — ребру DD_1 , точка K принадлежит грани BB_1C_1C . Расстояния AM и DP равны. Постройте сечение куба, проходящее через точки M , P и K .

28 а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через середины M , N , P попарно скрещивающихся рёбер.

б) Найдите площадь сечения, если ребро куба равно a .

29 Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через сторону верхнего основания, если угол между плоскостью этого основания и сечущей плоскостью равен 30° , а длина ребра куба 5 см.

Прямоугольный параллелепипед и его свойства

Н



30 Какими фигурами являются грани прямоугольного параллелепипеда, все измерения которого равны?

- 31** Может ли ребро прямоугольного параллелепипеда иметь длину, вдвое меньшую суммы длин остальных его рёбер?
- 32** Какие из фигур, изображённых на рис. 4.53, являются развёртками прямоугольного параллелепипеда?

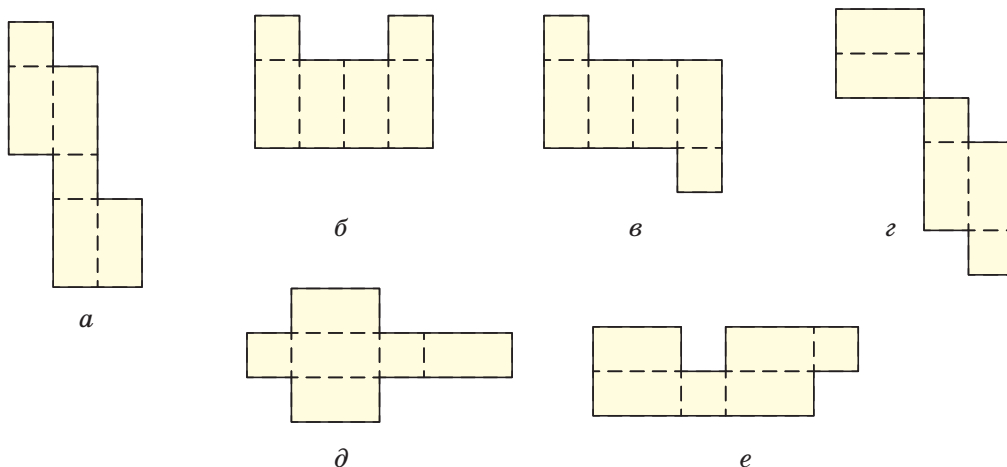


Рис. 4.53

Н

- 33** Длины трех рёбер прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, равны 6 см, 6 см и 8 см. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через середины указанных рёбер, и найдите его площадь.
- 34** Дан прямоугольный параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$. Постройте его сечение плоскостью, проходящей через середины рёбер AB , AA_1 и CD . Вычислите периметр сечения, принимая $AB = 8$ см, $BC = 7$ см, $AA_1 = 6$ см.
- 35** На рёбрах AA_1 и CC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ даны точки K и P такие, что $AK = KA_1$, $CP : PC_1 = 1 : 2$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью D_1KP .
- 36** Докажите, что квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда по данным его измерениям 5 см, 8 см и 10 см.
- 37** Определите, из каких развёрток можно сложить прямоугольный параллелепипед (рис. 4.54).

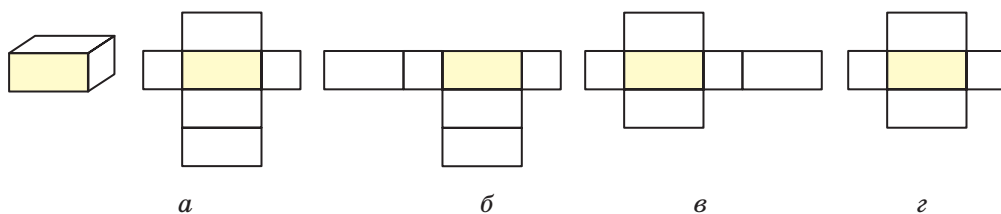


Рис. 4.54

- 38** Из каких представленных на рис. 4.55 а–г развёрток можно сконструировать прямоугольный параллелепипед S ?

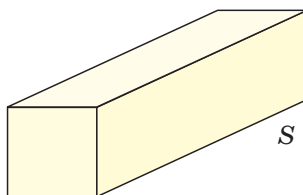
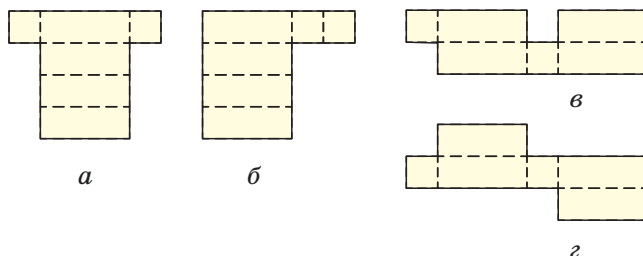


Рис. 4.55

П

- 39** Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и точка M , являющаяся внутренней точкой сечения $ACC_1 A_1$ (рис. 4.56). Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной: а) прямой BB_1 ; б) прямой BC .

М

- 40** (Необыкновенно догадливый муравей.) На внутренней стенке пустой коробки-параллелепипеда в точке A (рис. 4.57) расположился муравей, а на противоположной стенке в точке B прилепили зёрнышко. Муравью захотелось быстрее пробежать к нему. Помогите муравью найти кратчайший путь от точки A до точки B .

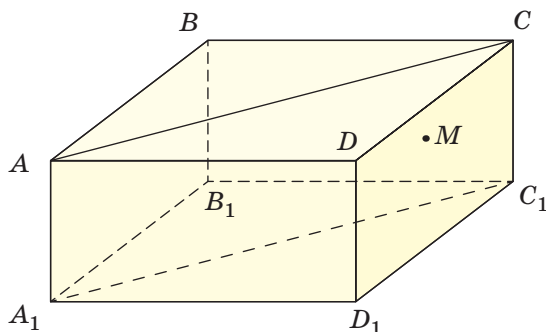


Рис. 4.56

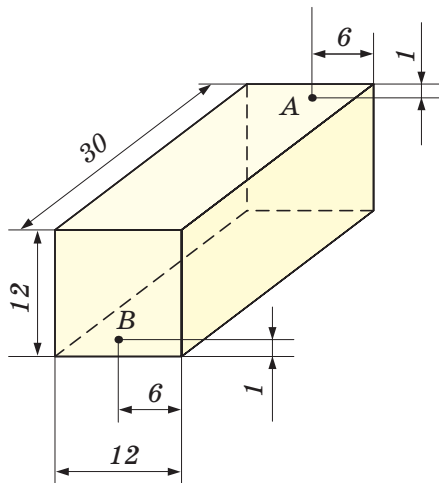


Рис. 4.57

Площадь поверхности куба и параллелепипеда

Н



- 41 Длина, ширина и высота прямоугольного параллелепипеда равны соответственно 12 см, 8 см и 20 см. Вычислите площадь его полной поверхности, сумму площадей оснований и площадь боковой поверхности.
- 42 Хорошо обрезанная доска имеет длину 6,5 м, её ширина 32 см, толщина 4 см. Вычислите площадь её полной поверхности.
- 43 Площадь боковой поверхности куба равна: а) 100 см^2 ; б) 54 см^2 ; в) 324 см^2 ; г) 576 см^2 . Вычислите площадь его полной поверхности.
- 44 Площадь полной поверхности куба 54 см^2 . Найдите его диагональ.
- 45 Вычислите площадь полной поверхности вашей классной комнаты и её боковую поверхность, сделав предварительно необходимые измерения.

Н

- 46 Сколько потребуется белил для окраски с обеих сторон бака (без крышки), имеющего форму куба с ребром, равным 100 см, если на окраску 1 м^2 требуется 0,25 кг белил?
- 47 Обозначив длину, ширину и высоту прямоугольного параллелепипеда через a , b , c , выразите в виде формулы: а) сумму площадей его оснований; б) площадь его боковой поверхности; в) площадь его полной поверхности.

- 48** Сколько кусков обоев потребуется для оклейки комнаты размером $6 \times 5 \times 3$ м, если размер одного куска $0,5 \times 7$ м и на обрезки достаточно иметь запас, равный площади окон и двери?
- 49** Куб разрезали на два равных прямоугольных параллелепипеда. Ответьте на вопросы:
- а) Какую часть составляет площадь поверхности одного из полученных параллелепипедов от площади поверхности данного куба?
 - б) Можно ли куб с ребром 1 см разбить на кубики так, чтобы суммарная площадь поверхности этих кубиков была больше 1 м^2 ?
- 50** Площади трёх граней прямоугольного параллелепипеда 2 м^2 , 3 м^2 и 4 м^2 . Найдите площадь его поверхности.
- 51** Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, если длина одного из его рёбер a , а площади прилежающих к нему граней S_1 и S_2 .

П

- 52** Площади трёх граней прямоугольного параллелепипеда S_1 , S_2 , S_3 . Найдите длины его рёбер.

Произвольные призмы

Н



- 53** На рисунке 4.58 изображена правильная пятиугольная призма $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$. Ответьте на вопросы:
- а) Сколько вершин имеет эта призма? Назовите их.
 - б) Сколько рёбер имеет эта призма? Назовите их.
 - в) Сколько граней имеет эта призма? Назовите их.
 - г) Какие многоугольники являются основаниями призмы?
 - д) Назовите параллельные рёбра данной призмы.
- 54** На рисунке 4.59 изображена наклонная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, основания которой – правильные треугольники.
- а) Назовите параллельные отрезки и плоскости (части плоскостей) на этом рисунке.
 - б) Назовите равные фигуры на этом рисунке.
- 55** Какой многоугольник служит основанием: а) треугольной призмы; б) правильной четырёхугольной призмы; в) прямоугольного параллелепипеда; г) призмы, имеющей n граней?
- 56** а) Сколько граней имеет неочинённый шестигранный карандаш?
б) Сколько граней имеет n -угольная призма?

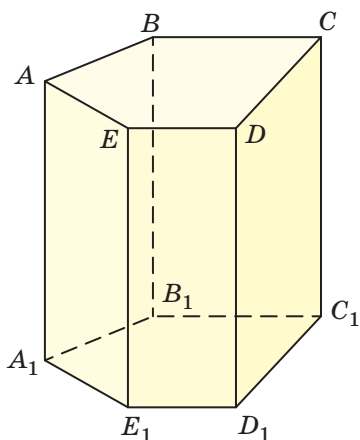


Рис. 4.58

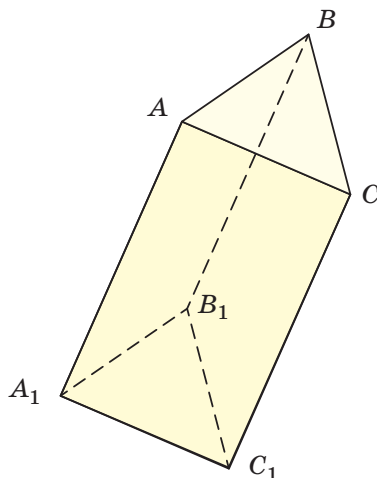


Рис. 4.59

Н



- 57** Одна из боковых граней призмы является прямоугольником. Следует ли из этого, что и все её боковые грани являются прямоугольниками?
- 58** Может ли основание призмы быть: а) треугольником; б) равнобедренным треугольником; в) ромбом; г) произвольным многоугольником?
- 59** Может ли боковая грань призмы быть: а) треугольником; б) четырёхугольником; в) шестиугольником?
- 60** Установите, верны ли следующие утверждения.
 а) Все грани прямоугольного параллелепипеда – прямоугольники.
 б) Все грани прямого параллелепипеда – прямоугольники.
 в) Ни одна грань наклонного параллелепипеда не является прямоугольником.
 г) Правильная четырёхугольная призма, одна из боковых граней которой – квадрат, является кубом.
 д) Прямоугольный параллелепипед есть правильная призма.
- 61** Какова зависимость между числом боковых граней призмы и числом сторон её основания?
- 62** Существует ли призма, число рёбер которой равно:
 а) 8; б) 15; в) 13; г) 12; д) 100?
- 63** Сколько вершин, граней и рёбер имеет n -угольная призма?
- 64** Сколько диагональных сечений имеет правильная призма: а) десятиугольная; б) n -угольная?

- 65** Какое наименьшее число граней (рёбер, вершин) может иметь: а) прямая призма; б) наклонная призма?
- 66** Сколько диагоналей имеет: а) треугольная призма; б) четырёхугольная призма; в) шестиугольная призма; г) n -угольная призма?

Н

- 67** Дополните следующие утверждения.
- Изображённую на рисунке 4.60 призму называют ... призмой.
 - Четырёхугольник $ABCD$ называют
 - Отрезок AA_1 называют
 - Если бы отрезок AA_1 был перпендикулярен плоскости основания, то призму называли бы
 - Параллелограмм BB_1CC_1 называют
 - Объединение боковых граней называют
 - Если бы четырёхугольник $ABCD$ был параллелограммом, то призму называли бы ...
- 68** Заполните пропуски так, чтобы в результате получилось истинное высказывание.
- Если $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ – основания четырёхугольной призмы (рис. 4.61), то:
- ребро AA_1 параллельно ... ;
 - ребро AB равно ребру ... ;
 - четырёхугольник ADD_1A_1 является ... ;
 - рёбра BB_1 и AC принадлежат ... ;
 - четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ равен

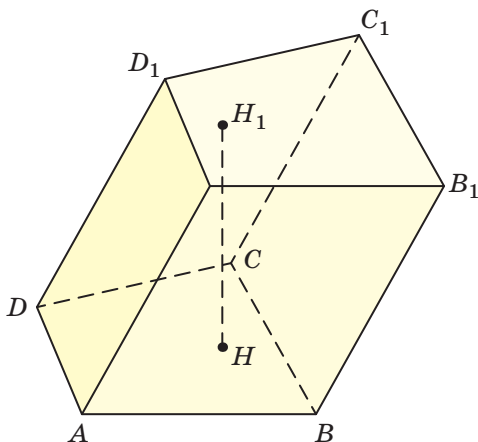


Рис. 4.60

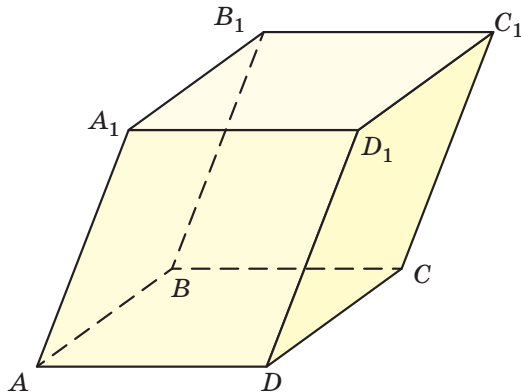


Рис. 4.61

- 69** На рис. 4.62 изображена правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$. Ребро основания этой призмы равно a , а боковое ребро равно b . Найдите: а) площадь боковой грани призмы; б) площадь основания призмы; в) площадь сечения $FCC_1 F_1$; г) длину диагонали CF_1 призмы.

- 70** Сторона основания правильной четырёхугольной призмы равна a , высота равна b . Найдите диагонали основания, боковой грани и призмы.

- 71** Найдите величину двугранного угла при боковом ребре правильной пятиугольной призмы.

- 72** Боковое ребро призмы равно l и наклонено к плоскости основания под углом α . Найдите высоту призмы.

- 73** Докажите, что в сечении треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ плоскостью, проходящей через точки D на ребре AB , E на ребре BC и F на ребре $A_1 B_1$, две стороны параллельны.

- 74** В правильной четырёхугольной призме площадь основания 144 см^2 , а высота 10 см . Найдите площадь диагонального сечения призмы.

- 75** Основание призмы – ромб с углом 60° и стороной a , а все боковые грани – квадраты. Найдите длины диагоналей призмы и площади диагональных сечений.

- 76** Найдите диагонали прямой призмы, основание которой – ромб со стороной a и острым углом φ , а большая диагональ этой призмы наклонена к плоскости основания под углом β .

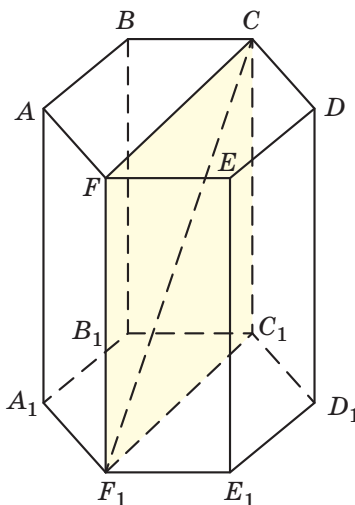


Рис. 4.62

ЗАДАЧИ К §§ 4.3–4.4

Понятие параллелепипеда и его свойства



- 77** Начертите в тетради параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Перечислите все плоскости, каждая из которых проходит через три вершины паралле-

лепипеда. Для каждой из плоскостей назовите фигуру, которая служит пересечением этой плоскости и параллелепипеда.

- 78** Плоскостям каких граней параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ параллельны: а) прямая AB ; б) прямая DD_1 ; в) прямая $B_1 C_1$; г) прямая, соединяющая середины рёбер AB и CD ? Сделайте чертёж.

Н



- 79** Может ли боковая грань наклонного параллелепипеда быть прямоугольником?
- 80** Сколько боковых граней наклонного параллелепипеда могут быть прямоугольниками?
- 81** Верно ли утверждение: длины всех диагоналей прямоугольного параллелепипеда равны? Сформулируйте утверждение, обратное данному. Верно ли оно?
- 82** Верно ли утверждение: в прямом параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ для длин его диагоналей справедливы равенства $AC_1 = A_1 C$, $BD_1 = B_1 D$? Сформулируйте утверждение, обратное данному. Верно ли оно?
- 83** Верно ли утверждение: в наклонном параллелепипеде не может быть ни одной пары равных диагоналей?
- 84** Имеет ли наклонный параллелепипед: а) ось симметрии; б) плоскость симметрии?
- 85** а) Может ли основание наклонного параллелепипеда быть прямоугольником?
б) Могут ли две грани наклонного параллелепипеда быть перпендикулярны плоскости основания? Может ли иметь такой наклонный параллелепипед ось и плоскость симметрии?

Н

- 86** Постройте пересечение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и плоскости α , проведенной через ребра: а) AB и $D_1 C_1$; б) AA_1 и CC_1 .
- 87** Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Докажите равенство: а) двугранных углов с рёбрами AA_1 и CC_1 ; б) трёхгранных углов с вершинами A и C_1 ;
- 88** Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $BC = a$, $AB = b$, $BB_1 = c$. Найдите сумму длин всех рёбер параллелепипеда.
- 89** Постройте сечение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через прямую BC_1 и середину M ребра DD_1 .

- 90** В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка M – середина ребра $B_1 C_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через:
а) прямую DC и точку M ; б) прямую AD и точку M .
- 91** Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Постройте точку пересечения прямой $A_1 C$ с плоскостью, проходящей через рёбра AB и $C_1 D_1$.
- 92** Докажите, что если все диагонали параллелепипеда равны, то он является прямоугольным.
- 93** Докажите, что любой отрезок, проходящий через точку пересечения диагоналей параллелепипеда, с концами на его поверхности делится этой точкой пополам.
- 94** Стороны основания прямого параллелепипеда равны 50 см и 5 см, угол между ними 45° . Найдите площади диагональных сечений параллелепипеда, если его высота 20 см.

П

- 95** Стороны основания прямого параллелепипеда 18 см и 7 см, угол между ними 135° , боковое ребро равно 12 см. Найдите диагонали параллелепипеда.
- 96** Основанием параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ служит квадрат со стороной a , боковое ребро параллелепипеда равно b . Боковое ребро AA_1 образует с пересекающими его сторонами основания острые углы, равные φ . Найдите площади диагональных сечений $AA_1 C_1 C$ и $BB_1 D_1 D$ параллелепипеда.
- 97** Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Докажите, что: а) прямая BC_1 параллельна плоскости $A_1 AD$; б) прямая AA_1 параллельна плоскости $B_1 BD$.
- 98** Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна $\sqrt{111}$. Найдите площадь поверхности этого параллелепипеда, если его рёбра относятся как 3 : 4 : 7.
- 99** Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$; точки M и N принадлежат соответственно ребрам AA_1 и BC , P – внутренняя точка грани $A_1 B_1 C_1 D_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью MNP .
- 100** Постройте сечение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через точки M , N , P , где точка M принадлежит ребру BB_1 , N и P – внутренние точки граней $BB_1 C_1 C$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$ соответственно.
- 101** Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Постройте его сечение плоскостью, проходящей через отрезок BD_1 и точку M , принадлежащую ребру CC_1 .

- 102** Постройте сечение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью MNP , если точки M, N, P – соответственно внутренние точки граней: а) $ABCD, ABB_1 A_1, ADD_1 A_1$; б) $ABCD, A_1 B_1 C_1 D_1, ABB_1 A_1$.
- 103** Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$; точка M принадлежит грани $ABCD$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью: а) проходящей через точку M и параллельной грани $ABB_1 A_1$; б) проходящей через точку M и параллельной плоскости ABC_1 .
- 104** Дан параллелепипед. Вычислите сумму квадратов расстояний между всеми парами его вершин, если известны длины рёбер параллелепипеда.
- 105** Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Докажите, что сумма квадратов площадей трёх непараллельных граней параллелепипеда равна сумме квадратов площадей граней треугольной пирамиды $ABC_1 D_1$.
- 106** Докажите, что сумма квадратов площадей диагональных сечений параллелепипеда равна сумме квадратов площадей всех его боковых граней.
- 107** Площади трёх граней прямоугольного параллелепипеда S_1, S_2, S_3 . Найдите: а) объём параллелепипеда; б) диагональ параллелепипеда.
- 108** Прямой параллелепипед, основанием которого служит ромб с тупым углом α , пересечён плоскостью, проходящей через вершину тупого угла так, что в сечении получился квадрат. Найдите угол между плоскостями сечения и основания.
- 109** Докажите, что для любого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ верно равенство: $AC_1^2 = AC^2 + AB_1^2 + AD_1^2 - AB^2 - AD^2 - AA_1^2$.
- 110** Стороны основания прямого параллелепипеда 8 дм и 5 дм, одна из диагоналей основания 3,2 дм, большая диагональ параллелепипеда 13 дм. Найдите его вторую диагональ.

М

- 111** а) Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Сколько существует параллелограммов, для которых эти точки служат вершинами?
 б) В пространстве даны 4 точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько существует различных параллелепипедов, для которых эти точки служат вершинами?

Обобщённая теорема Пифагора

Н



- 112** Ребро куба равно a . Найдите диагональ куба.

Н

- 113** В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $D_1 B = d$, $AC = m$, $AB = n$. Найдите расстояние между: а) прямой $A_1 C_1$ и плоскостью ABC ; б) плоскостями ABB_1 и DCC_1 ; в) прямой DD_1 и плоскостью ACC_1 .
- 114** Найдите расстояние от вершины куба до плоскости любой грани, в которой не лежит эта вершина, если: а) диагональ грани куба равна m ; б) диагональ куба равна d .
- 115** Сумма площадей трёх граней прямоугольного параллелепипеда, имеющих общую вершину, равна 404 дм^2 , а его рёбра пропорциональны числам 3, 7 и 8. Найдите диагональ параллелепипеда.
- 116** Правильный шестиугольник $ABCDEF$ со стороной 1 согнули по диагонали AD так, что его части оказались в перпендикулярных плоскостях. Вычислите новое расстояние между B и F , отрезком AB и E .

П

- 117** В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребро равно 2. Точка K – середина ребра CD , точка L – середина ребра $C_1 B_1$, точка A – середина отрезка MB , точка N – середина AK , точка P лежит на отрезке $A_1 D$, точка Q лежит на отрезке CD . Вычислите: а) $A_1 K$; б) KL ; в) LM ; г) LN ; д) PQ , если $DP = DA_1/3$, $D_1 Q = D_1 C/3$.
- 118** Пусть ABC и ACD – два прямоугольных треугольника с катетами 3 и 4. Они имеют общую гипотенузу AC и лежат в перпендикулярных плоскостях. Вычислите BD . (Возможны два случая.)
- 119** Два полукруга имеют общий диаметр AB и лежат в перпендикулярных плоскостях. Из точки A по окружности одного из них и из точки B по окружности другого одновременно и с одной скоростью движутся точки K и L . Как изменяется KL ?

ЗАДАЧИ К §§ 4.5 – 4.6**Пирамиды****Н**

- 120** Какое наименьшее число рёбер может быть у многогранника? Каково наименьшее число граней?
- 121** Можно ли утверждать, что прямая лежит в плоскости какой-либо грани треугольной пирамиды, если она имеет с поверхностью этой пирамиды: а) одну общую точку; б) две общие точки; в) три общие точки; г) четыре общие точки?

- 122** Существует ли пирамида, у которой: а) 4 ребра; б) 6 рёбер; в) 11 рёбер; г) 30 рёбер?
- 123** Какими фигурами являются диагональные сечения правильной четырёхугольной пирамиды?
- 124** Развёртки каких пирамид состоят только из равных фигур?
- 125** Сколько боковых рёбер пирамиды могут быть перпендикулярными плоскости основания?
- 126** Какое максимальное число боковых граней пирамиды может быть перпендикулярно плоскости её основания?
- 127** Приведите пример пирамиды, для которой плоскость диагонального сечения является плоскостью симметрии.
- 128** а) Всякий ли параллелограмм может быть основанием правильной пирамиды?
 б) Может ли правильный многоугольник быть основанием неправильной пирамиды?
- 129** а) Сколько плоскостей симметрии имеет правильная треугольная пирамида?
 б) Сколько плоскостей симметрии имеет правильная четырёхугольная пирамида?
 в) Всякая ли правильная пирамида имеет плоскость симметрии?
- 130** Может ли площадь боковой грани правильной треугольной пирамиды: а) быть больше площади основания; б) быть меньше половины площади основания?

Н

- 131** Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$, M – середина ребра SD . Найдите длину рёбер пирамиды $MABC$, если $AB = a$, $SA = a$.
- 132** В правильной четырёхугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α . Найдите: 1) двугранный угол между противоположащими боковыми гранями; 2) угол наклона бокового ребра к плоскости основания пирамиды. Исследуйте решение.
- 133** В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, двугранный угол при боковом ребре равен 120° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
- 134** Через основание высоты правильной треугольной пирамиды проведите сечение, параллельное двум скрещивающимся рёбрам.

- а) Докажите, что это сечение – прямоугольник.
б) Найдите площадь сечения, если сторона основания равна a , а боковое ребро b .

- 135** Существует ли правильная пирамида, длины всех рёбер которой равны между собой, а число сторон основания равно: а) 5; б) 6; в) 8?
- 136** Сторона основания правильной n -угольной пирамиды равна a , двугранный угол при ребре основания равен φ . Найдите площадь сечения, проведённого через боковое ребро перпендикулярно к плоскости основания, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$.
- 137** Основание четырёхугольной пирамиды — параллелограмм, углы диагональных сечений при вершине пирамиды равны 90° . Докажите, что этот параллелограмм является прямоугольником.
- 138** Основание пирамиды – квадрат, значения двугранных углов при сторонах основания пропорциональны числам 1, 2, 4, 2. Найдите эти углы.

Площадь поверхности пирамиды

Н



- 139** В правильной четырёхугольной пирамиде длина стороны основания 2 см, длина апофемы 3 см. Чему равны площади боковой и полной поверхностей пирамиды.

Н

- 140** Сторона основания правильной пирамиды равна a , высота пирамиды H . Найдите площадь боковой поверхности, если число сторон основания равно: а) 3; б) 4; в) 6; г) n .
- 141** Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с катетами a и b , высота пирамиды проходит через вершину прямого угла основания и равна h . Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
- 142** Основанием пирамиды служит правильный шестиугольник, две смежные боковые грани перпендикулярны к плоскости основания. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если высота её равна стороне основания a .
- 143** Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a . Угол, образованный высотой пирамиды с боковой гранью, равен 30° . Найдите площади боковой и полной поверхностей пирамиды.

- 144** В основании пирамиды лежит прямоугольник со сторонами a и b . Одно из боковых рёбер пирамиды перпендикулярно плоскости основания и имеет длину h . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
- 145** В основании пирамиды лежит ромб со стороной a . Две боковые грани перпендикулярны основанию и образуют между собой двугранный угол α . Две другие боковые грани составляют с основанием угол φ . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
- 146** Основание пирамиды – равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a , а все боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом φ . Найдите площадь полной поверхности данной пирамиды.
- 147** Основание пирамиды – ромб со стороной 6 см и углом 45° , все двугранные углы при сторонах основания равны 60° . Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Усечённая пирамида

Н



- 148** а) На рис. 4.63 изображена треугольная усечённая пирамида $ABCA_1B_1C_1$. Сколько вершин, рёбер и граней имеет треугольная усечённая пирамида? Назовите их.
- б) Сколько диагональных сечений может иметь усечённая пирамида: треугольная; четырёхугольная; шестиугольная?
- в) Сколько рёбер перпендикулярных плоскости основания может иметь усечённая пирамида.

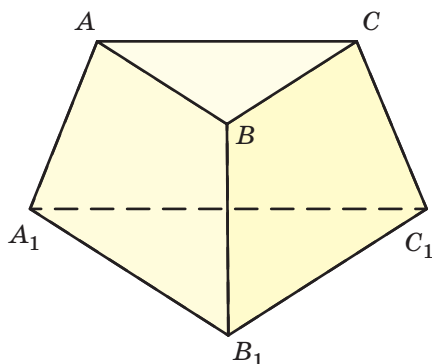


Рис. 4.63

- 149** На какие фигуры делит пирамиду плоскость, параллельная плоскости основания пирамиды и проходящая через точку бокового ребра?
- 150** Какой многогранник называют усечённой пирамидой? Какими многоугольниками являются основания и боковые грани усечённой пирамиды? Какой отрезок является её высотой?
- 151** Какую усечённую пирамиду называют правильной? Что представляют собой основания и боковые грани такой пирамиды?

- 152** Могут ли у четырёхугольной усечённой пирамиды две противоположные боковые грани быть перпендикулярными основанию? Если могут, то изобразите такую усечённую пирамиду.

- 153** Высота правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равна 7 см. Стороны оснований равны 10 см и 2 см. Найдите боковое ребро пирамиды.

- 154** Дана треугольная усечённая пирамида $ABCA_1B_1C_1$. Докажите, что точки пересечения медиан G и G_1 граней ABC и $A_1B_1C_1$ и точка M пересечения плоскостей ABC_1 , BCA_1 и CAB_1 принадлежат одной прямой.
- 155** Высота пирамиды равна h . На каком расстоянии от вершины пирамиды нужно провести плоскость, параллельную основанию, чтобы площадь сечения равнялась: а) $\frac{1}{4}$ площади основания; б) $\frac{1}{n}$ площади основания?
- 156** а) Плоскость α делит боковые рёбра пирамиды на отрезки, которые относятся как $m : n$ (считая от вершины). Докажите, что эта плоскость параллельна плоскости основания пирамиды.
б) Найдите площадь сечения, если площадь основания равна Q .
- 157** а) Стороны оснований правильной шестиугольной усечённой пирамиды равны 12 см и 10 см, высота равна 6 см. Через сторону большего основания и центр меньшего проведена плоскость. Найдите площадь получившегося сечения.
б) Каким должно быть отношение сторон оснований правильной шестиугольной усечённой пирамиды, чтобы построенное сечение было прямоугольником?
- 158** Стороны оснований правильной треугольной усечённой пирамиды равны 12 см и 6 см, высота 4 см. Через сторону большего основания и противоположащую ей вершину меньшего основания проведена плоскость. Найдите площадь сечения.
- 159** По высоте h и сторонам оснований a и b ($a > b$) найдите площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды: а) треугольной; б) четырёхугольной; в) n -угольной.
- 160** Сколько диагоналей имеет четырёхугольная усечённая пирамида? Верно ли, что все они пересекаются в одной точке?

- 161** Основания усечённой пирамиды – равнобедренные треугольники; равные их стороны a и b ($a > b$), углы при вершинах треугольников равны по 120° . Ребро, проходящее через вершины данных углов, перпендикулярно плоскостям оснований и равно c . Найдите площадь боковой поверхности усечённой пирамиды.
- 162** Основания усечённой пирамиды – квадраты со сторонами 3 см и 4 см; одна из боковых граней, являющаяся равнобедренной трапецией, перпендикулярна к плоскостям оснований, а противолежащая ей грань образует с плоскостью основания угол 60° . Найдите площадь боковой поверхности усечённой пирамиды.
- 163** Какую усечённую пирамиду называют правильной? Нарисуйте правильную усечённую четырёхугольную пирамиду. Обозначьте её буквами. Проведите высоту пирамиды и одну из апофем. По каким элементам усечённой пирамиды можно найти площади её боковой и полной поверхностей?
- 164** Вычислите площади боковой и полной поверхностей правильной четырёхугольной усечённой пирамиды, стороны оснований которой 12 см и 8 см, апофема 6 см.
- 165** Найдите площади боковой и полной поверхностей правильной треугольной усечённой пирамиды, стороны оснований которой равны 6 см и 2,5 см, боковое ребро равно 3 см.
- 166** Стороны оснований правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равны 8 см и 2 см, высота равна 4 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

ЗАДАЧИ К § 4.7

Трёхгранные углы

Н



- 167** На рис. 4.64 изображён трёхгранный угол. Назовите вершину этого угла, рёбра и плоские углы.
- 168** На рис. 4.64 изображён прямоугольный трёхгранный угол. Какие его плоские углы являются прямыми? Назовите их.
- 169** Какие фигуры можно получить при пересечении трёхгранного угла и плоскости?
- 170** В трёхгранном угле два плоских угла – острые. Каким по величине может быть третий плоский угол?

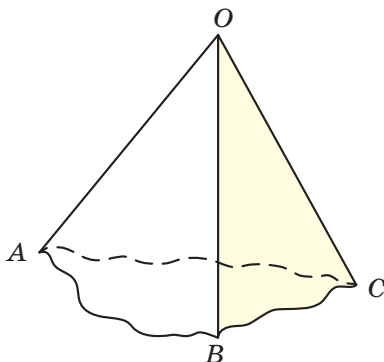


Рис. 4.64

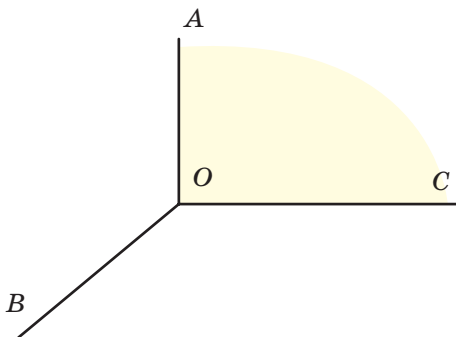


Рис. 4.65

Н

- 171** Все плоские углы трёхгранного угла прямые. Найдите величины двугранных углов того трёхгранного угла.
- 172** Докажите, что если сумма плоских углов трёхгранного угла равна 180° , то все они острые.
- 173** Треугольники ABC и ABD не лежат в одной плоскости. Докажите, что $\angle ABC + \angle CBD + \angle BDA + \angle DAC = 360^\circ$.
- 174** В трёхгранном угле два плоских угла равны по 45° , а двугранный угол между ними прямой. Найдите третий плоский угол.
- 175** Все плоские углы трёхгранного угла равны по 60° . На одном из рёбер взята точка на расстоянии a от вершины угла. Найдите расстояние от этой точки до плоскости противоположащей грани.
- 176** В трёхгранном угле два плоских угла равны по 60° , а третий равен 90° . Найдите угол наклона ребра, противоположащего прямому плоскому углу, к плоскости этого угла.
- 177** Из плотной бумаги или картона вырежьте углы 50° , 60° , 90° , 120° , 140° , 150° . Попытайтесь изготовить модель поверхности трёхгранного угла со следующими плоскими углами: а) 120° , 60° , 90° ; б) 140° , 120° , 90° ; в) 150° , 90° , 60° ; г) 140° , 60° , 30° ; д) 140° , 120° , 60° ; е) 150° , 120° , 90° ; ж) 150° , 140° , 120° . Сформулируйте выводы: в каких случаях из трёх плоских углов нельзя составить поверхность трёхгранного угла?
- 178** Можно ли изготовить модель поверхности трёхгранного угла с плоскими углами: а) 100° , 120° , 10° ; б) 80° , 50° , 30° ; в) 125° , 120° , 115° ; г) 80° , 120° , 150° ; д) 120° , 120° , 120° ; е) 130° , 90° , 160° ; ж) 100° , 40° , 60° ; з) 90° , 30° , 40° .

- 179** Два плоских угла трёхгранного угла равны: а) 70° и 80° ; б) 100° и 90° . В каких границах находится третий плоский угол?
- 180** Могут ли все плоские углы трёхгранного угла быть прямыми? Изобразите такой трёхгранный угол. Постройте сечение этого трёхгранного угла плоскостью, не проходящей через его вершину и пересекающей все его рёбра. Какая фигура получится в сечении?
- 181** На рис. 4.66 изображён кубик, на гранях которого изображены буквы. Какие слова получатся, если прочесть буквы, рассматривая кубик последовательно: а) спереди, слева, сверху; б) сверху, справа, спереди? Какие ещё слова можно составить из имеющихся на гранях букв, глядя на кубик с разных сторон?
- 182** На рис. 4.67 изображён кубик, сделанный из прозрачного материала. На каждую его грань нанесён рисунок. На верхней и нижней гранях нарисованы прямые линии, на левой грани – цветок, на правой – листочки, на передней – волны, на задней – кораблик. Поместим кубик в прямоугольный трёхгранный угол таким образом, чтобы грань с корабликом примыкала к вертикальной плоскости угла, а грань с цветком – к фронтальной. Какой рисунок можно увидеть на каждой из граней трёхгранного угла?

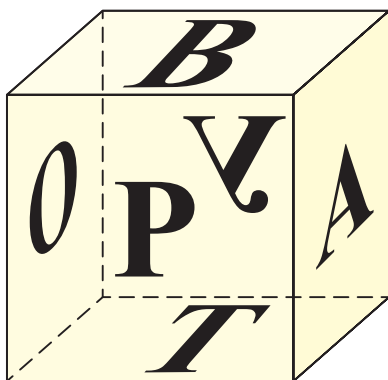


Рис. 4.66

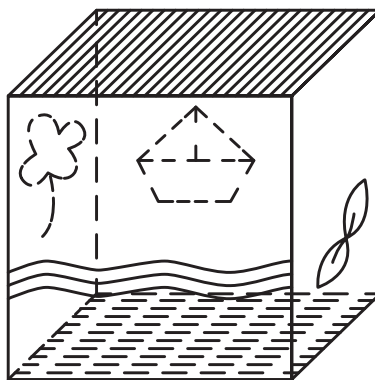


Рис. 4.67

П

- 183** Из точки выходят n лучей, из которых никакие три не лежат в одной плоскости. Выведите формулу, выражающую число различных трёхгранных углов, определяемых этими лучами.

Многогранные углы

Н

- 184** На рис. 4.68 изображён четырёхгранный угол $OABCD$. Назовите вершину этого угла, его рёбра и грани. Сколько плоских углов имеет этот угол?

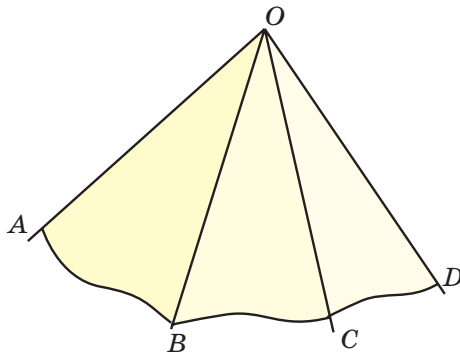


Рис. 4.68

Н

- 185** Сколько лучей определяют:
а) трёхгранный угол; б) четырёхгранный угол; в) пятигранный угол? Как должны быть расположены эти лучи?
- 186** Какая фигура может получиться при объединении и пересечении:
а) плоскости и трёхгранного угла; б) плоскости и пятигранного угла?
- 187** Как проверить, является ли выпуклым данный многогранный угол?

Н

- 188** Многогранный угол имеет n граней. Сколько у него рёбер? двугранных углов?
- 189** Существует ли многогранный угол, имеющий плоские углы: а) 80° , 130° , 70° , 100° ; б) 10° , 20° , 40° , 80° , 160° ?
- 190** а) Существует ли четырёхгранный угол, имеющий ось симметрии?
б) Может ли такой угол не иметь плоскости симметрии?
- 191** В многогранном угле каждый из плоских углов равен: а) 10° ; б) 45° ; в) 80° ; г) 150° . Сколько граней может иметь такой многогранный угол?
- 192** Сумма всех плоских углов некоторого многогранного угла равна 280° . Каждый плоский угол равен 20° . Сколько граней имеет данный многогранный угол?
- 193** Докажите, что каждый плоский угол четырёхгранного угла меньше суммы трёх остальных его плоских углов.
- 194** В четырёхгранном угле все плоские углы равны. Докажите, что они острые.

- 195** В многогранном угле все плоские углы равны между собой. Многогранный угол имеет: а) шесть; б) восемь; в) десять граней. Чему могут быть равны плоские углы данного многогранного угла?
- 196** Многогранный угол имеет n граней. Градусная мера i -го плоского угла выражается следующей формулой:
 $\alpha = 20^\circ + 20^\circ(i - 1)$,
 где $1 \leq i < n$. Найдите n , если многогранный угол выпуклый.
- 197** Докажите, что величина каждого плоского угла многогранного угла меньше суммы величин остальных его плоских углов.
- 198** Докажите, что в многогранном угле сумма его плоских меньше 360° .

ЗАДАЧИ К § 4.8

П

- 199** Докажите, что если биссектрисы двух плоских углов трёхгранного угла взаимно перпендикулярны, то биссектриса третьего плоского угла перпендикулярна каждой из первых двух биссектрис.
- 200** Докажите, что если сумма плоских углов трёхгранного угла равна 180° , то все они острые.
- 201** Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с его рёбрами a , b и c углы α , β и γ . Докажите, что $\alpha + \beta + \gamma$ меньше 180° .
- 202** Найдите множество всех точек трёхгранного угла, каждая из которых одинаково удалена от всех его рёбер.
- 203** Докажите, что для любого трёхгранного угла с плоскими углами α , β и γ выполняется неравенство: $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma > -\frac{3}{2}$.
- 204** Докажите, что биссектрисы двух плоских углов трёхгранного угла и биссектриса угла, смежного с третьим плоским углом, лежат в одной плоскости.
- 205** Все плоские углы трёхгранного угла прямые. Докажите, что его сечение любой плоскостью, пересекающей все три ребра, есть остроугольный треугольник.
- 206** Каждый плоский угол трёхгранного угла равен α . На одном из рёбер отложен от вершины отрезок длиной a . Найдите длину проекции этого отрезка на противоположную грань.

- 207** В треугольной пирамиде $ABCD$ все плоские углы при вершине D прямые, $AD = a$, $BD = b$, $DC = a + b$. Докажите, что сумма плоских углов при вершине C равна 90° .
- 208** В треугольной пирамиде $ABCD$ суммы плоских углов при каждой из вершин A, B, C равны 180° . Докажите, что все грани треугольной пирамиды равны.
- 209** В трёхгранном угле два плоских угла равны α , а двугранный угол между ними прямой. Найдите третий плоский угол.
- 210** В трёхгранном угле два двугранных угла равны по 135° , их общий плоский угол прямой. Найдите третий двугранный угол.
- 211** Плоские углы трёхгранного угла равны α , β и γ . Найдите угол между биссектрисой угла α и противоположащим ему ребром.
- 212** Каждый плоский угол трёхгранного угла равен α . На одном из рёбер взята точка, удаленная от вершины на расстояние a . Найдите расстояние от этой точки до плоскости противоположащей грани.
- 213** Сумма плоских углов трёхгранного угла равна 180° . Докажите, что сумма косинусов его двугранных углов равна 1.
- 214** Плоские углы трёхгранного угла равны 60° , 60° , 90° . Найдите углы наклона рёбер к плоскостям противоположащих граней.
- 215** Все плоские углы трёхгранного угла равны, его двугранный угол равен φ . Найдите косинус плоского угла.
- 216** Два плоских угла трёхгранного угла равны α , третий плоский угол прямой. На общей стороне равных плоских углов взята точка на расстоянии h от плоскости противоположащей грани. Найдите расстояние от этой точки до вершины трёхгранного угла.
- 217** а) Докажите, что через гипотенузу равнобедренного прямоугольного треугольника нельзя провести плоскость так, чтобы каждый катет был вдвое больше своей проекции на эту плоскость.
б) Найдите наибольшее отношение $a : a_1$, где a — длина катета равнобедренного прямоугольного треугольника, a_1 — длина его проекции на плоскость, проходящую через гипотенузу.
- 218** Верно ли утверждение, что каждый двугранный угол трёхгранного угла меньше суммы двух других двугранных углов?

М

- 219** Двугранные углы трёхгранного угла равны 60° , 120° , 90° . Найдите его плоские углы.

- 220** Докажите, что против равных двугранных углов трёхгранного угла лежат равные плоские углы.
- 221** Докажите, что сумма двугранных углов трёхгранного угла больше 180° , но меньше 540° .
- 222** Докажите, что в трёхгранном угле для любого двугранного угла A выполняется неравенство: $\angle A > \angle B + \angle C - 180^\circ$, где $\angle B$ и $\angle C$ два других двугранных угла.
- 223** В трёхгранном угле два двугранных угла равны 90° и 50° . В каких гранях находится третий двугранный угол?
- 224** Сумма двугранных углов трёхгранного угла равна 360° . Докажите, что сумма косинусов его плоских углов равна -1 .
- 225** Пользуясь теоремой косинусов для трёхгранного угла $\cos \alpha = \cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos A$, докажите, что $\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$.
- 226** Найдите плоские углы трёхгранного угла, если они удовлетворяют соотношению $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma$.

ЗАДАЧИ К § 4.9

Н



- 227** Сколько вершин, рёбер, граней имеет каждый из пяти правильных многогранников?

Н



- 228** Как относятся высота и сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды, если известно, что из двух таких пирамид можно составить правильный октаэдр?
- 229** Является ли правильным многогранник, вершины которого – центры всех граней: а) куба; б) тетраэдра; в) октаэдра?
- 230** Является ли правильным многогранник, вершины которого – середины всех рёбер: а) куба; б) тетраэдра; в) октаэдра?
- 231** Ученик рассуждает: «Каждая призма – многогранник, следовательно, каждая правильная призма – правильный многогранник». Прав ли он? Обоснуйте свой ответ.
- 232** Многогранник состоит из двух тетраэдров, имеющих общее основание. Можно ли его назвать правильным многогранником?

- 233** а) Является ли правильная пирамида (призма) правильным многогранником?
 б) Существует ли пирамида (призма), являющаяся правильным многогранником?
- 234** Восьмигранник является объединением двух правильных четырёхугольных пирамид, у которых все рёбра равны и имеют общее основание. Является ли он правильным многогранником?
- 235** Докажите, что сумма расстояний от произвольной внутренней точки куба до всех его граней постоянна.
- 236** Сколько плоскостей симметрии имеет октаэдр?
- 237** Может ли шестиугольник быть сечением октаэдра? А девятиугольник?
- 238** Докажите, что не существует правильного многогранника, гранями которого являются правильные n -угольники при $n \geq 6$.
- 239** Ребро октаэдра равно 4 см. Найдите площадь сечения этого октаэдра его плоскостью симметрии.
- 240** Под каким углом из центра куба видно его ребро? А из центра октаэдра?
- 241** Докажите, что противоположные грани октаэдра лежат в параллельных плоскостях.
- 242** Найдите длину диагонали шестигранника, являющегося объединением двух тетраэдров с общей гранью, если длина его ребра равна a .
- 243** Найдите длины диагоналей октаэдра, если длина его ребра равна a .
- 244** Постройте развёртки правильных многогранников: а) тетраэдра; б) гексаэдра; в) октаэдра (длину ребра каждого многогранника выберите самостоятельно).
- 245** Из одной вершины куба проведены три диагонали граней, их концы соединены отрезками. Докажите, что пирамида, рёбрами которой служат построенные шесть отрезков, есть правильный тетраэдр.
- 246** Докажите, что центры граней куба служат вершинами правильного многогранника. Какого именно?
- 247** Найдите величину двугранного угла: а) тетраэдра; б) октаэдра.
- 248** Постройте сечение тетраэдра $SABC$ плоскостью, которая проходит через середину ребра SA , перпендикулярна грани SBC и параллельна ребру BC .
- 249** Ребро октаэдра равно a . Найдите расстояние между плоскостями его противоположных граней.

- 250** Постройте сечение октаэдра плоскостью, перпендикулярной одному из рёбер и делящей это ребро пополам. Вычислите площадь сечения, если ребро октаэдра равно a .
- 251** а) Ребро октаэдра имеет длину a . Найдите расстояние между центрами двух соседних граней.
б) Длина ребра октаэдра равна 3. Найдите расстояние между противоположащими параллельными гранями.
- 252** В тетраэдре $ABCD$ точка M – середина ребра BD . Докажите, что: а) ребро BD перпендикулярно плоскости ACM ; б) высоты AA_1 и CC_1 треугольника ACM соответственно перпендикулярны граням BCD и ABD .
- 253** Найдите величину двугранного угла: а) икосаэдра; б) додекаэдра.
- 254** Октаэдр пересечён двумя плоскостями, перпендикулярными его диагонали и отсекающими четвёртые части этой диагонали, считая от вершин октаэдра. Найдите площадь полной поверхности средней части октаэдра, если его диагональ равна d .

Площади поверхностей правильных многогранников

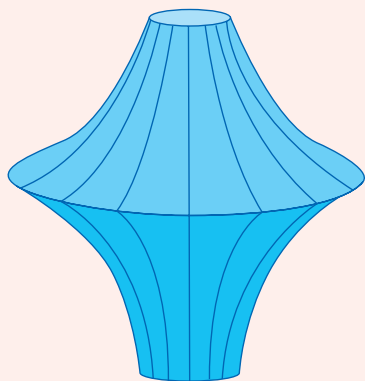
- 255** По данному ребру a правильного многогранника найдите площадь его поверхности. Задачу решите для: а) куба; б) тетраэдра; в) октаэдра.
- 256** Длина ребра октаэдра равна a . Найдите площадь его поверхности.
- 257** Площадь поверхности тетраэдра равна Q . Найдите длину его ребра.
- 258** Длина ребра тетраэдра 5 см. Найдите площадь его поверхности.
- 259** Площадь поверхности тетраэдра 36 см^2 . Найдите длину его ребра.
- 260** Постройте сечение куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершину A , середину ребра BC и центр грани DCC_1D_1 .
- 261** Докажите, что сумма расстояний от любой точки M , лежащей внутри правильного многогранника, до плоскостей всех его граней не зависит от выбора точки M .
- 262** Площадь полной поверхности октаэдра равна S . Найдите площадь полной поверхности многогранника, вершинами которого служат центры граней данного октаэдра.
- 263** По данному ребру a найдите площадь полной поверхности: а) икосаэдра; б) додекаэдра.

ГЛАВА 5

СФЕРА И ШАР

Душа имеет форму шара...

Андрей Андреевич Вознесенский
(русский поэт, 1933–2010)



Псевдосфера

§ 5.1



ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СФЕРЫ И ШАРА

В геометрии есть фигуры, которые имеют специальное название – *фигуры вращения*.

Из самого названия этих фигур следует, что они связаны с понятием вращения фигуры вокруг некоторой оси.

В учебнике геометрии для 7–9 классов в § 6.1 «Поворот. Геометрические преобразования» мы рассматривали преобразование плоскости – *поворот на данный угол*. В пространстве такого преобразования нет, а есть преобразование пространства – *вращение фигуры вокруг оси на данный угол*.

В нашем учебнике геометрии для 11 класса в главе 3 мы будем подробно изучать геометрические преобразования пространства, в том числе вращение вокруг данной оси на данный угол. Сейчас мы рассмотрим основы этого преобразования на примерах изучаемых фигур вращения.

1. Пусть дана прямая l , и пусть M – произвольная точка, не принадлежащая прямой l .

2. Через точку M проведём плоскость α , перпендикулярную прямой l (рис. 5.1). Пусть прямая l и плоскость α пересекаются в точке O .

3. В плоскости α рассмотрим окружность с центром O и радиусом OM .

4. Условимся говорить, что эта окружность получена при вращении точки M вокруг оси l .

5. В плоскости, проходящей через прямую l , зададим фигуру F , например, треугольник ABC (рис. 5.2а). Фигуре F поставим в соответствие объединение Φ всех точек фигуры F , принадлежащих прямой l , и окружностей, полученных при вращении всех точек фигуры F , не принадлежащих прямой l (рис. 5.2б). Говорят, что фигура Φ получена при вращении фигуры F вокруг прямой (оси) l .

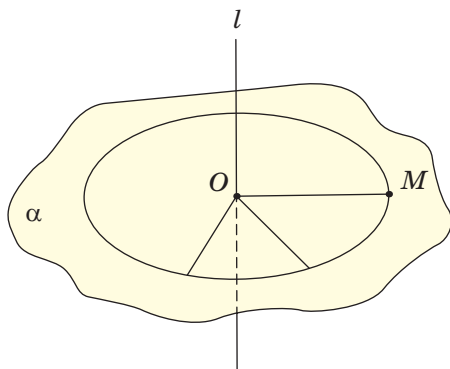


Рис. 5.1

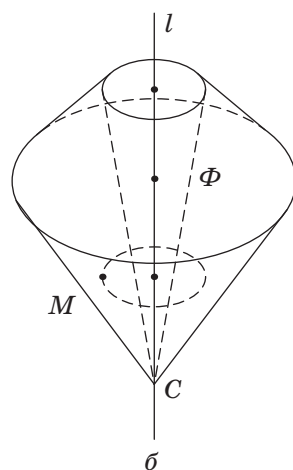
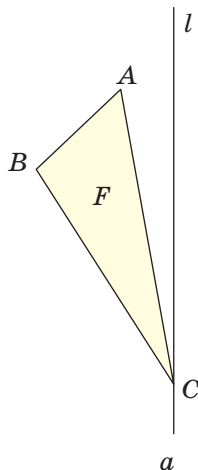


Рис. 5.2

На основании описанной выше процедуры можно дать такое определение фигуры вращения:

Определение 50. Если фигура Φ получена при вращении некоторой фигуры F вокруг некоторой оси, то Φ называется *фигурой вращения*.

С моделями фигур вращения мы часто имеем дело на практике. Это детали, выточенные на токарном станке (рис. 5.3), многие виды посуды и т.д.

В этой и следующих главах мы будем изучать наиболее известные фигуры вращения: сферу, шар, цилиндр, конус. Однако существует и много других фигур вращения: тор (рис. 5.4), параболоид (фигура, полученная вращением параболы вокруг её оси) (рис. 5.5), псевдосфера (смотрите заставку к данной главе) и т.д.

Из приведённых примеров вы видите, что каждая фигура вращения получается от вращения какой-то другой (плоской) фигуры относительно некоторой оси. Так, тор (рис. 5.4) получен от вращения круга вокруг оси, а параболоид вращения (рис. 5.5) получен от вращения параболы вокруг оси.

В учебнике геометрии для 7–9-го классов в § 5.1 «Определение и некоторые свойства круглых фигур» мы дали определения таким фигурам, как шар и сфера. Они определялись как множества точек, обла-

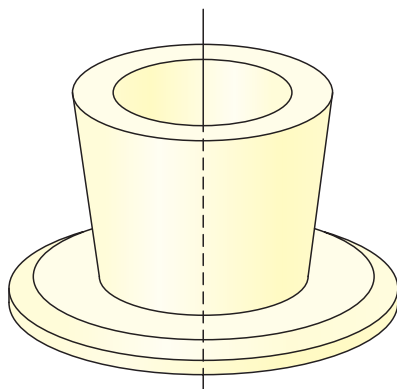


Рис. 5.3

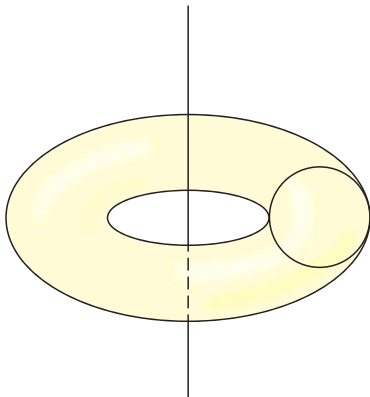


Рис. 5.4

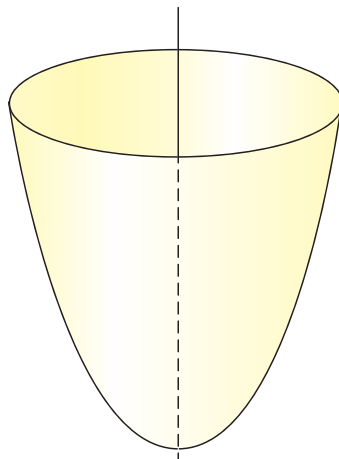


Рис. 5.5

дающие определёнными свойствами. Теперь мы рассмотрим эти фигуры как фигуры вращения.



Как можно построить сферу? Как можно построить шар?

Пусть полуокружность ACB вращается вокруг оси, содержащей диаметр полуокружности AB , тогда получится фигура вращения – *сфера* (рис. 5.6).

Определение 51. Фигура, образованная вращением полуокружности вокруг своего диаметра, называется *сферой*.

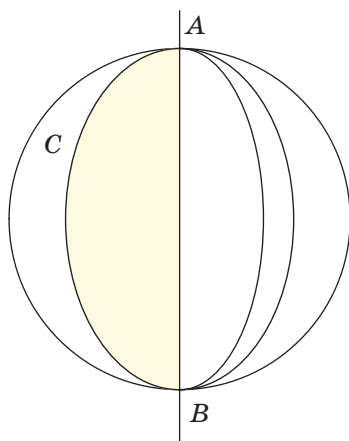


Рис. 5.6

Полуокружность ACB на рис. 5.6. называют *образующей сферы*.

Каждая точка M образующей сферы ACB лежит на окружности $\text{окр. } (O_1, O_1M)$, целиком принадлежащей сфере (рис. 5.7). Мы изобразили эту полуокружность на сечении сферы плоскостью, проходящей через дугу ACB и диаметр AB . Все эти окружности – *параллели*, наибольшая из них называется *экватором*. Так, окружность $\text{окр. } (O, OK)$ – экватор сферы (рис. 5.7). Обратите внимание на то, что мы для наглядности будем иногда использовать географические термины.

Рассмотрим сферу с центром в точке O , полученную при вращении полуокружности PNP_1 вокруг оси l , содержащей диаметр полуокружности PP_1 (рис. 5.8).

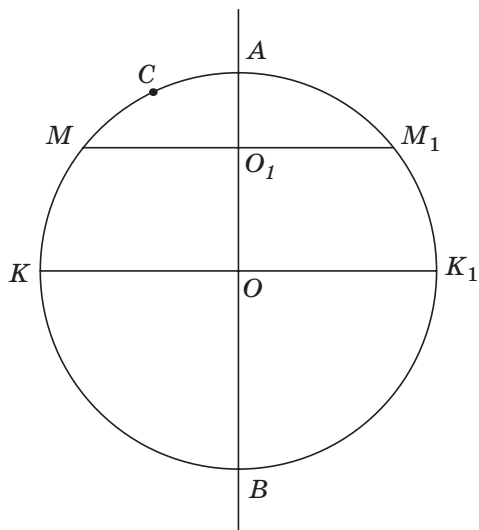


Рис. 5.7

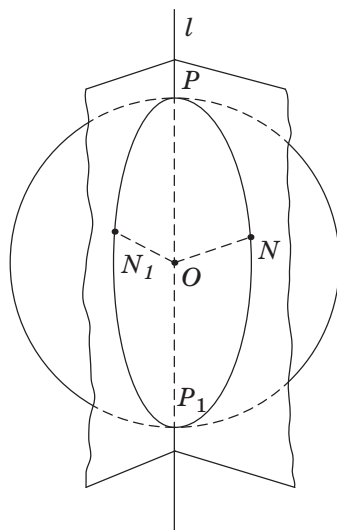


Рис. 5.8

Каждая точка N сферы лежит на полуокружности PNP_1 (рис. 5.8); каждая из этих полуокружностей называется *меридианом*. Отрезок ON равен радиусу OP образующей полуокружности. Обратно, если $ON_1 = OP$, то точка N_1 лежит на сфере; действительно, полуплоскость PN_1P_1 пересекает сферу по полуокружности (меридиану) радиуса, равного OP , следовательно, лежит на этом меридиане, т.е. на сфере. Мы доказали, что сфера – геометрическое место точек пространства, которые отстоят на данное расстояние от одной точки. Тем самым мы доказали, что имеющиеся в наших учебниках для 7–9-го классов и для 10 класса два определения сферы эквивалентны (или равносильны).

Сферы, как и окружности, можно для краткости обозначать так – сфера (O, R) или короче сф. (O, R) . Эта запись читается так: «Сфера с центром в точке O и радиусом R ».

Аналогично можно определить шар. На рис. 5.9 полуокруг вращается вокруг оси, содержащей диаметр полуокруга. В результате получается шар с центром в точке O .

Определение 52. Шаром называется фигура, полученная вращением полуокруга вокруг диаметра, ограничивающего этот полуокруг.

Запись «шар (O, R) » читается так: «Шар с центром в точке O и радиусом R ».

Докажите самостоятельно, что шар – геометрическое место точек, которые отстоят от точки O на расстояние, не превышающее данное, т.е. равносильность двух имеющихся у вас определений шара.

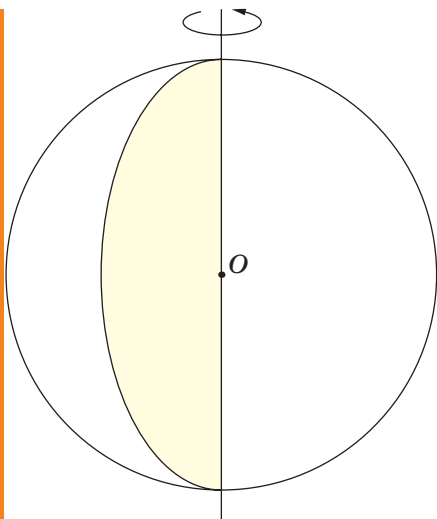


Рис. 5.9

вается *диаметром сферы (шара)*; PP_1 и KN – диаметры (рис. 5.10).

Сейчас мы обсудим вопрос о том, как человечество пришло к мысли, что Земля имеет форму шара.

То, что Земля по форме близка к шару, было известно ещё древнегреческим учёным. Наблюдения мореплавателей и путешественников позволяли утверждать, что известная грекам часть Земли (части Европы, Азии и Африки, непосредственно примыкающие к Средиземному и Чёрному морям и

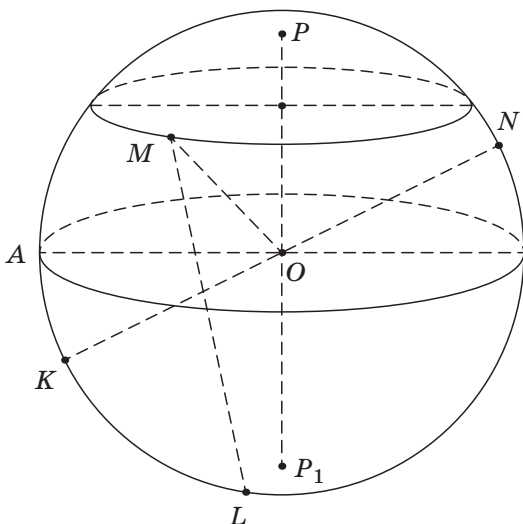


Рис. 5.10

Поверхность шара – сфера, образованная вращением соответствующей полуокружности. Сферу иначе называют шаровой поверхностью.

Очевидно, что точки, расстояние которых от центра меньше радиуса, – внутренние точки шара, а точки, находящиеся на расстоянии, большем радиуса, – внешние относительно шара.

Определение 53. Отрезок, соединяющий две точки сферы, называется *хордой сферы* (а также хордой соответствующего шара).

На рис. 5.10 мы имеем несколько таких хорд: PP_1 , KN и т.д.; хорда, проходящая через центр сферы (шара), называется *диаметром сферы (шара)*; PP_1 и KN – диаметры (рис. 5.10).

восточной части Атлантического океана) – выпукла. Эти данные позволили учёным того времени выдвинуть смелую гипотезу о замкнутости поверхности Земли. Наблюдения за тенью Земли на поверхности Луны во время затмений привели греков к убеждению, что Земля – шар.

Первую географическую карту Земли составил знаменитый греческий учёный Клавдий Птолемей (около 150 г. до н.э.). Птолемей пытался развернуть сферическую поверхность Земли на плоскость (рис. 5.11). Меридианы изображались двузвенными скруглёнными «ломаными», а параллели – дуга-

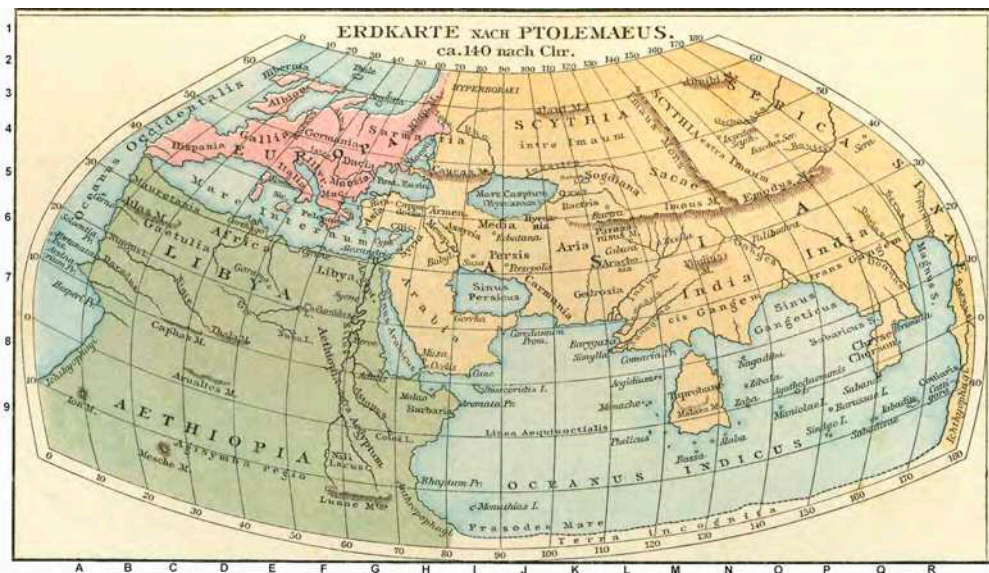


Рис. 5.11

ми окружностей, верхняя из которых соответствует примерно полярному кругу, нижняя – экватору.

Примерно к тому же времени (середина II века до н.э.) относится и изготовление первого из известных глобусов. Глобус этот, сделанный философом Кратесом Малосским, не сохранился. До наших дней дошёл глобус (рис. 5.12), изготовленный жителем Нюрнберга Мартином Бихеймом намного позже – в 1492 году.

Многие учёные древности хотели получить *развёртку шара*. Однако, оказывается, с шаром это понятие несовместимо.

Вспомним, как делаются развёртки многогранника. У него можно, например, разрезать почти все рёбра, оставляя лишь по одному неразрезанному ребру у большинства граней, чтобы поверхность не распадалась на куски. Положив полученную фигуру на плоскость, вы получите развёртку многогранника. Но в 1777 году Леонард Эйлер, доказал, что никакая (сколь угодно малая!) часть сферической поверхности не может быть развёрнута на плоскость с сохранением всех расстояний.

Вот почему мы не говорим о развёртке шара и не можем её использовать в практических целях.



Рис. 5.12



ИЗОБРАЖЕНИЕ СФЕРЫ И ШАРА



Мы уже знаем некоторые приёмы и методы изображения многогранников.



Как правильно изобразить на листе бумаги шар или сферу?

Чтобы вести разговор об изображении шара или сферы на плоскости (и вообще об изображении всех фигур вращения), нужно быть знакомыми с геометрической фигурой, которая называется *эллипс*.

В рамках нашего курса об эллипсе говорится в дополнении к учебнику для 10 класса (параграф Д. 8.1, с. 318).

Для тех, кто изучает настоящий параграф до знакомства с параграфом, посвящённым эллипсу, или вовсе не предполагает знакомиться с ним, мы кратко расскажем об эллипсе здесь.

Эллипс, как и две другие кривые: гиперболу и параболу открыл древнегреческий математик Менехм около 360 г. до н.э.; описания этих исследований дошли до нас в замечательных сочинениях выдающегося древнегреческого математика Аполлония, написанных примерно 200 лет спустя.

На вопрос «что такое эллипс?» можно ответить: «вытянутый круг» или «вытянутая окружность», «сжатый круг (окружность)», «кривая овальной формы». Мы начнём со следующей трактовки эллипса:



Эллипсом называется фигура, полученная деформацией окружности (её растяжением или сжатием с постоянным коэффициентом) относительно её диаметра.

Напомним, что с растяжением или сжатием кривой вдоль координатной оси вы познакомились ещё в 9 классе, когда строили графики функций. В параграфе 1.2 учебника алгебры для 9 класса было сформулировано такое правило:

График функции $y = k \cdot f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением от оси Ox (параллельно оси Oy) в k раз при $k > 1$, и сжатием к оси Ox (параллельно оси Oy) в $\frac{1}{k}$ раз при $0 < k < 1$.

1. Рассмотрим рис. 5.13. Возьмём окружность с центром O и будем растягивать её в k раз (где $k > 1$) вдоль вертикального диаметра E_1H_1 (от горизонтального диаметра C_1D_1).

2. Пусть a – радиус окружности; тогда её диаметр C_1D_1 , лежащий на горизонтальной оси, перейдёт сам в себя ($CD = 2a$), перпендикулярный к нему диаметр E_1H_1 перейдёт в отрезок EH ($EH = 2ka$).

3. Для произвольной точки M_1 окружности проведём прямую M_1M_0 , перпендикулярную диаметру C_1D_1 , и отложим на ней отрезок MM_0 , такой, что $MM_0 = k \cdot M_1M_0$.

4. Точка M_1 окружности перейдёт при растяжении в точку M (рис. 5.13).

Обозначим длину отрезка OE через b , $OE = OH = b$. Тогда $ka = b$.

Отрезки CD и EH называются *осями эллипса*; т.к. $CD = 2a$, $EH = 2b$, то расстояния a и b называются *полуосями эллипса*. Если $k > 1$ (растяжение), то $b > a$ (рис. 5.13). Если же $0 < k < 1$ (сжатие), то $b < a$ (рис. 5.14). При $k = 1$ (тождественное преобразование) окружность перейдёт в себя. Будем считать, что окружность является частным случаем эллипса ($b = a$).

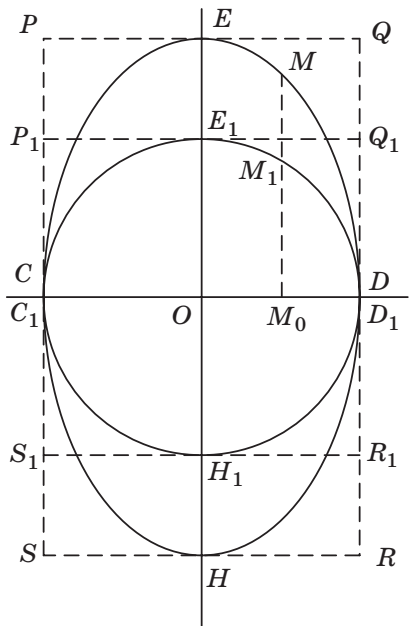


Рис. 5.13

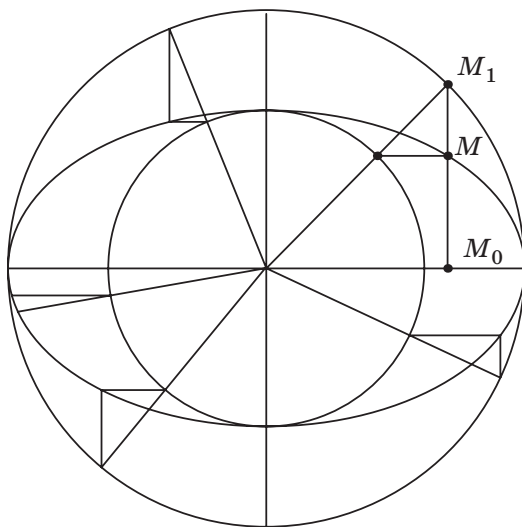


Рис. 5.14

Оси эллипса (а значит и его полуоси) имеют естественные названия. Большая из осей (большой из отрезков CD , EH) называется *большой осью эллипса*, меньшая – *малой осью*. Итак, если $k > 1$, то a – малая полуось и b – большая, а если $k < 1$, то наоборот. В обоих случаях $k = \frac{b}{a}$.

Точка O – центр окружности – перейдёт при деформации в себя. Она называется *центром эллипса*, точки C , D , E , H – его *вершинами*.

На рис. 5.14 показан ещё один способ построения эллипса.

1. Строим две взаимно перпендикулярные прямые и две окружности с центром в их точке пересечения, радиусы которых равны полуосям эллипса.

2. Проводим радиус большей окружности (его часть будет одновременно являться радиусом меньшей окружности).

3. Через конец радиуса, лежащий на меньшей окружности, проводим горизонтальную прямую, а через конец радиуса, лежащий на большей окружности – вертикальную. Точка пересечения этих прямых даст точку эллипса.

4. Проводя всевозможные радиусы, получим эллипс, вытянутый вдоль горизонтальной оси (рис. 5.14).

5. Для доказательства заметим, что отношение длин отрезков MM_0 и M_1M_0 является величиной постоянной, равной отношению радиуса меньшей окружности к радиусу большей (по теореме о пропорциональных отрезках).

Заметим, что проводя горизонтальную прямую через конец радиуса, лежащий на большей окружности, а вертикальную – на меньшей, мы получили бы эллипс, вытянутый вдоль вертикальной оси.

Существует специальный прибор, позволяющий строить эллипс – эллипсограф. Устройство этого прибора можно понять из рис. 5.15, сопоставив его с описанием понятия эллипса.

Построить эллипс можно также непрерывным движением при помощи нитяного кольца. Положим лист бумаги на чертёжную доску и наклеим на него две канцелярские кнопки. Набросив на обе кнопки нитяное кольцо (периметр кольца должен быть больше удвоенного расстояния между кнопками), натянем нить остриём карандаша так, чтоб получился треугольник ΔF_1F_2M (рис. 5.16).

Если двигать карандашом по бумаге так, чтобы нить оставалась в натянутом положении, то треугольник будет деформироваться, но его периметр останется постоянным. Постоянной останется и длина стороны F_1F_2 – значит, $F_1M + F_2M = \text{const}$, и карандаш опишет эллипс.

Мы получили очень простой эллипсограф. Этот способ с успехом используют садовники при изготовлении цветочных клумб эллиптической формы. Вместо кнопок в землю втыкают два кола, кольцо делается из толстой верёвки, а эллипс вычерчивается на земле не карандашом, а палкой (рис. 5.16). Такой практический способ построения эллипса очень удобен. Точки, в которых размещены кнопки (или колья), называют *фокусами эллипса*. Основан этот способ на ещё одном определении эллипса:

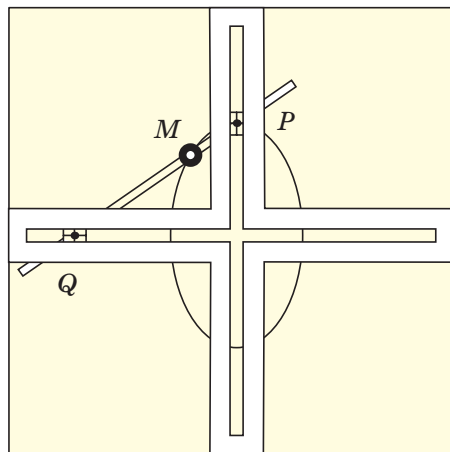


Рис. 5.15

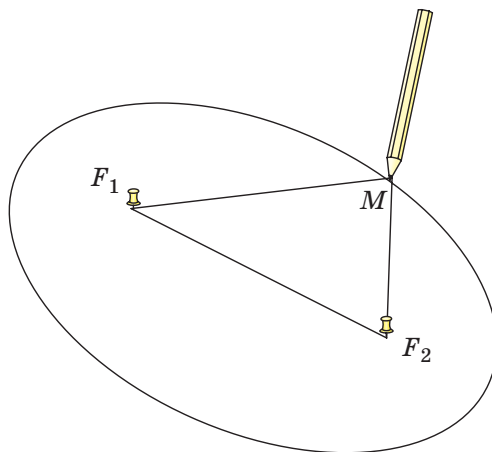


Рис. 5.16



Эллипс – это множество (геометрическое место) всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная.

Ещё раз напомним, что подробно об эллипсе говорится в дополнении к нашему учебнику (параграф Д. 8.1, с. 318). Там, в частности, установлена равносильность обоих определений эллипса, приведённых в данном параграфе.

Из второго определения эллипса следует, что постоянная для любой точки M эллипса сумма $F_1M + F_2M$ равна $2a$ (большой оси эллипса). Для этого в качестве точки M можно взять точку H – вершину эллипса, являющуюся концом большой оси (рис. 5.17).

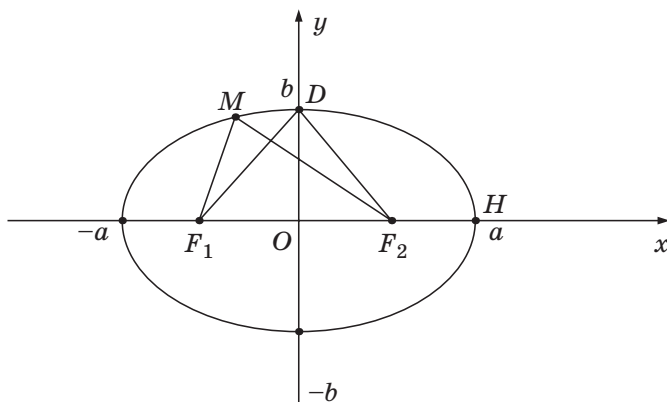


Рис. 5.17

Если расстояние между фокусами традиционно обозначить через $2c$, то числа a (большая полуось), b (малая полуось) и c (расстояние от центра эллипса до каждого из фокусов) связаны соотношением $a^2 - b^2 = c^2$, которое легко устанавливается из рис. 5.17 (для этого в качестве точки M надо взять точку D – вершину эллипса, являющуюся концом малой оси, и рассмотреть треугольник DOF_2).

Уравнение эллипса в системе координат, изображённой на рис. 5.17, таково:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Если $a = b$, то эллипс превращается в окружность.

Очень интересно так называемое *оптическое свойство эллипса*. Луч, выходящий из одного его фокуса, после отражения от эллипса попадает во второй его фокус. Это свойство эллипса можно ощутить в пещерах, имеющих эллипсообразный свод, где слово, сказанное в одной (особой) точке пещеры, необычайно отчётливо слышно в другой её точке, находящейся на значительном расстоянии от первой. Эффект фокусирования звука сводчатым эллиптическим потолком был известен архитекторам ещё в XVII веке.

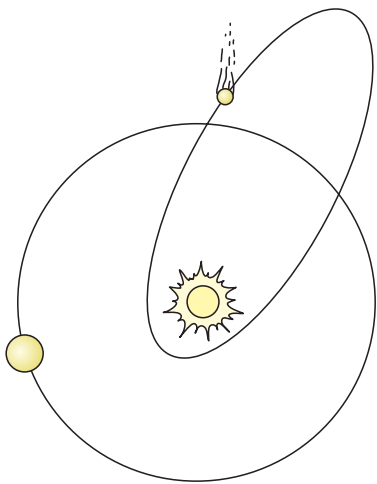


Рис. 5.18

Интерес к эллипсу сильно возрос после того, как в 1609 году немецкий астроном и математик Иоганн Кеплер установил, что небесные тела Солнечной системы – планеты, кометы, астероиды – движутся вокруг Солнца по эллипсам, причём Солнце находится в одном из фокусов таких эллипсов (рис. 5.18).

Рассмотрим теперь некоторые вопросы *изображения шара, сферы и их частей*.

Прежде всего, эллипс нам понадобится при изучении проекций окружности на некоторую плоскость.

Если спроектировать окружность, лежащую в некоторой плоскости, на другую плоскость, не параллельную и не перпендикулярную первой, то в проекции получится эллипс. Этот факт будет доказан в учебнике геометрии

для 11-го класса, в параграфе 1.2. Эллипс образуется, например, на плоской поверхности в виде тени от летящего в воздухе круглого диска (рис. 5.19).

Поместим перед плоским экраном шар, освещённый параллельными лучами (например, лучами Солнца). Если лучи наклонены к экрану α (рис. 5.20а), то тень шара является эллипсом; если же экран расположен перпендикулярно к лучам, то эта тень – круг (рис. 5.20б).

Изображение шара, при котором его контур – вытянутый эллипс, кажется не наглядным. Большинство людей скажет, что оно «не похоже на шар». По-

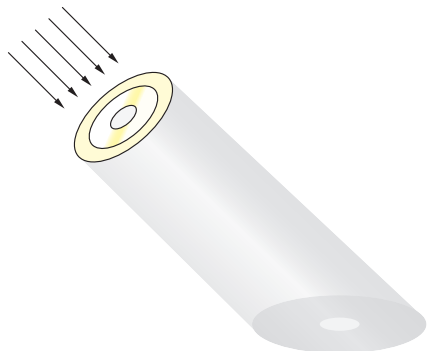


Рис. 5.19

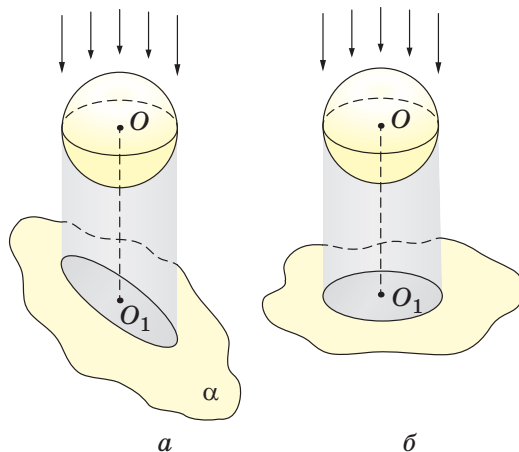


Рис. 5.20

этому принято при проектировании шара использовать ортогональную проекцию. Такой способ проектирования мы и изберём для построения изображения шара. Изображение шара (а также сферы) в виде круга наглядное и простое.

Иногда встречается ошибочное изображение шара, например, как на рис. 5.21. Объясним, в чём здесь ошибка. На рис. 5.21 экватор изображён эллипсом, нижняя часть которого соответствует видимой части экватора. Это означает, что проектирующие лучи наклонены к плоскости экватора и пересекают её сверху вниз (считаем, что они исходят из глаза наблюдателя). Но тогда Северный полюс N должен быть виден вместе с некоторой его окрестностью, а Южный полюс S должен находиться на невидимой задней части сферы (рис. 5.22).

Если же исходить из того, что полюса находятся на контуре, то проектирующие лучи должны быть параллельными плоскости экватора. Тогда экватор будет изображаться отрезком (рис. 5.23).

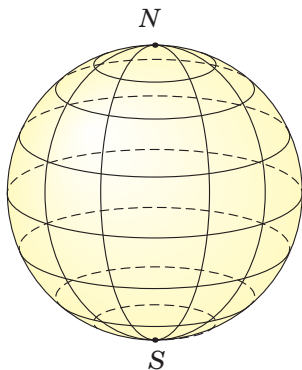


Рис. 5.21

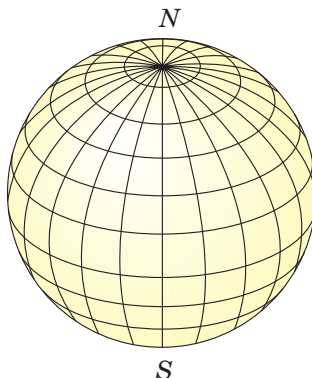


Рис. 5.22

Правильное изображение шара строится так: экватор и меридианы изображаются эллипсами, причём все меридианы проходят через две точки N и S .

После того, как экватор и полюса изображены, легко вычертить координатную сетку (меридианы и параллели) на шаре (рис. 5.24). Меридианы изображаются эллипсами, проходящими через точки N и S . Параллели изображаются подобными эллипсами, касающимися контура шара.

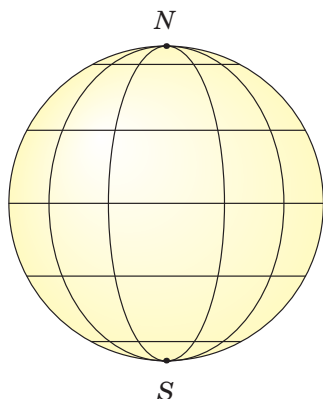


Рис. 5.23

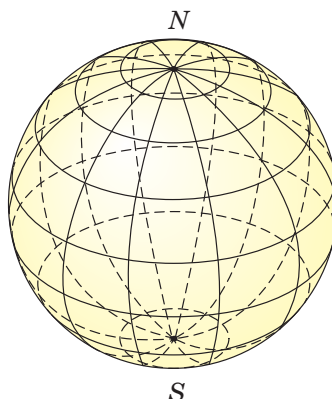


Рис. 5.24

При решении стереометрических задач чертёж играет вспомогательную роль, и нет смысла тратить на его выполнение больше труда, чем на решение самой задачи. Поэтому чертёж можно выполнить в основном на глаз.

В заключение добавим, что на сфере, как и на плоскости, легко ввести систему координат: *долготу* и *широту*. Напомним, что *долгота* – это угол, отсчитываемый в плоскости экватора от «нулевого» меридиана NKS против часовой стрелки (если смотреть с Северного полюса) до меридиана, на котором

лежит данная точка M (рис. 5.25), долгота обозначается буквой φ ; *широта* – угол, отсчитываемый в плоскости меридиана данной точки от экватора до радиуса данной точки. Широта имеет знак «+» к северу и знак «-» к югу (рис. 5.25), она обозначается буквой θ .

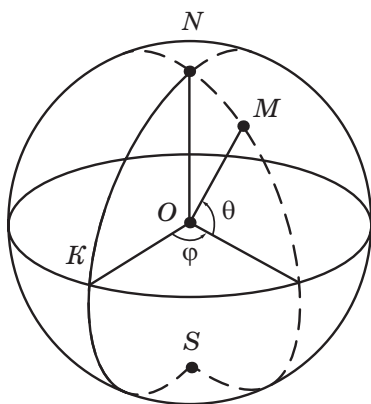


Рис. 5.25

Положение любой точки на сфере определяется её долготой φ и широтой θ , при этом $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$; $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.



Важно, что на сфере есть две координаты; это показывает, что сфера – поверхность; она двумерна.



СЕЧЕНИЕ ШАРА И СФЕРЫ ПЛОСКОСТЬЮ

Ранее, изучая пересечения геометрических фигур плоскостями, мы обратили внимание на то, что при пересечении шара плоскостью всегда получается круг, а при пересечении поверхности шара – сферы – плоскостью всегда получается окружность.

На рис. 5.26 мы видим, что в сечении сферы и шара плоскостями получаются круги и окружности разных радиусов.

Нас особенно будут интересовать те круги и окружности, которые получаются при пересечении шара и сферы плоскостями, проходящими через их центры. Эти круги и окружности называются соответственно *большими кругами* и *большими окружностями*. На рис. 5.27 изображены большие круги (а) и большие окружности (б). Ясно, что большой круг пересекает поверхность шара (сферу) по большой окружности.

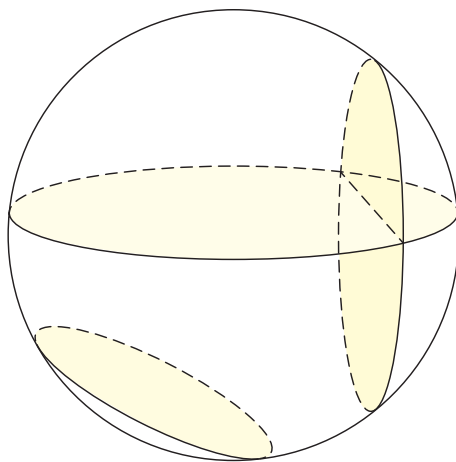


Рис. 5.26

Вспомним, что Земля – шар. Диаметр большого круга этого шара равен примерно 12 800 км. Любое другое сечение, не проходящее через центр, не является большим кругом и не имеет такого диаметра. Экватор

Земли – это наиболее важная большая окружность. Она получается при пересечении поверхности земного шара плоскостью, проходящей через центр Земли и перпендикулярной оси вращения Земли (рис. 5.28).

Ранее мы утверждали, что в сечении шара (сферы) плоскостью всегда получается круг (окружность). Теперь есть возможность доказать это утверждение.

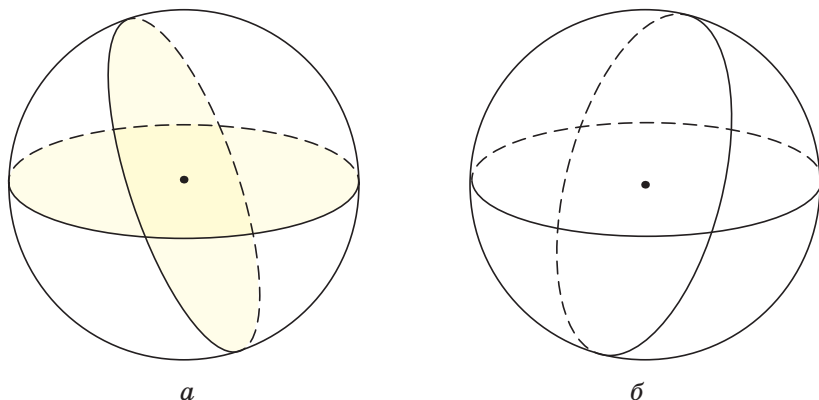


Рис. 5.27

Теорема 55. Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

Доказательство

1. Шар (O, R) .
 2. Плоскость α , пересекающая шар (на рисунке часть этой плоскости закрашена).
 3. Закрашенная часть плоскости α – круг с центром в точке O_1 , где O_1 – основание перпендикуляра, проведённого из точки O к плоскости α (требуется доказать).
- } (дано) (рис. 5.29а)

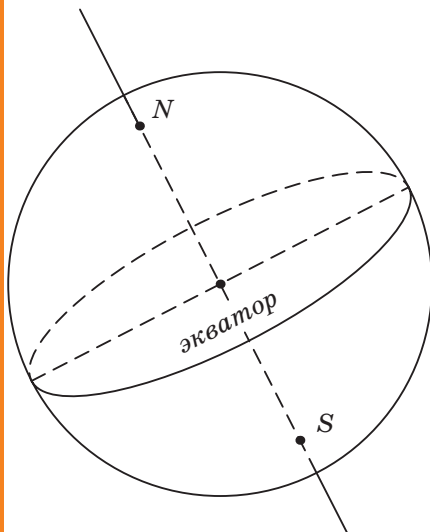


Рис. 5.28

Учитывая, что на рис. 5.29а нет перпендикуляра к плоскости α , нам нужно провести $OO_1 \perp \alpha$.

4. Проведём отрезок OO_1 , перпендикулярный плоскости α (построение) (рис. 5.29б)

Как доказать, что закрашенная часть плоскости α есть круг с центром в точке O_1 ?

Для этого надо доказать два утверждения:

- а) Если точка X принадлежит закрашенной части плоскости α , то она принадлежит кругу с центром в точке O_1 .
- б) Точки окружности, ограничивающей круг с центром в точке O_1 , лежащей в плоскости α , принадлежат шару.

Докажем утверждение а).

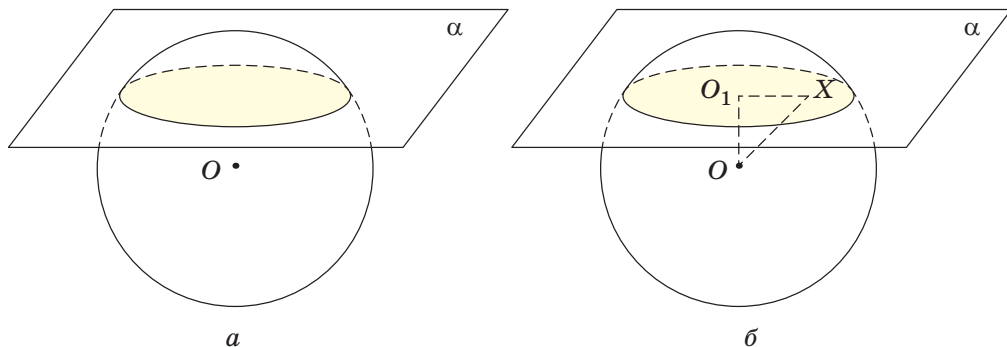


Рис. 5.29

5. Возьмём точку X в плоскости α , принадлежащую её закрашенной части (построение) (рис. 5.29б)

6. Проведём отрезки OX и O_1X (построение) (рис. 5.29б)

7. $\triangle OO_1X$ – прямоугольный (4, 5, 6, определение перпендикуляра к плоскости).

8. По теореме Пифагора $OX^2 = OO_1^2 + O_1X^2$. Так как OX не больше радиуса R шара, то $O_1X \leq \sqrt{R^2 - OO_1^2}$, т.е. любая точка сечения шара плоскостью α находится от точки O_1 на расстоянии, не большем $\sqrt{R^2 - OO_1^2}$, следовательно, она принадлежит кругу с центром O_1 и радиусом $\sqrt{R^2 - OO_1^2}$.

Доказательство пункта б) проведите самостоятельно.

Доказательство пунктов а) и б) позволяет утверждать, что сечение шара плоскостью α есть круг с центром в точке O_1 . ■

Плоскость, проходящая через центр шара, называется *диаметральной плоскостью*. Сечение шара диаметральной плоскостью является *большим кругом*.

Аналогично можно доказать теорему о сечении сферы плоскостью.

Теорема 56. Всякое сечение сферы плоскостью есть окружность. Центр этой окружности есть основание перпендикуляра, опущенного из центра сферы на секущую плоскость.

Сечение сферы диаметральной плоскостью является большой окружностью.



КАСАТЕЛЬНЫЕ ПЛОСКОСТИ К СФЕРЕ (ШАРУ)

На страницах учебника геометрии для 7–9-го классов мы говорили о касательной к окружности и её свойствах.

При рассмотрении возможных случаев взаимного расположения плоскости и шара (сферы) возникает понятие *плоскости, касательной к шару (сфере)*.

Определение 54. Касательной плоскостью к шару (сфере) называется плоскость, имеющая с шаром (сферой) одну и только одну общую точку.

Эта точка называется *точкой касания*, мы будем говорить, что *плоскость и сфера (шар) касаются друг друга в этой точке*.

На рис. 5.30 плоскость α касается сферы в некоторой точке O_1 .

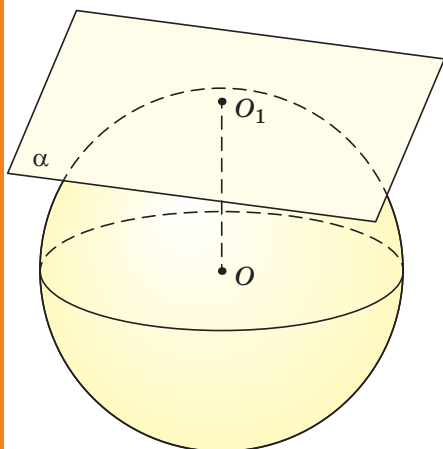


Рис. 5.30

Возникает вопрос, связанный с изображением плоскости, касательной к шару.



Принадлежит ли точка касания контуру шара на рис. 5.31а?

Когда шар лежит на столе и мы смотрим на него сверху, мы не можем видеть его точку опоры – точку касания. Точку касания следует изображать, лежащей внутри шара – точкой A (рис. 5.31б).

Каждый шар (сфера) имеет касательную плоскость во всякой своей точке.

Это утверждение следует из такой теоремы.

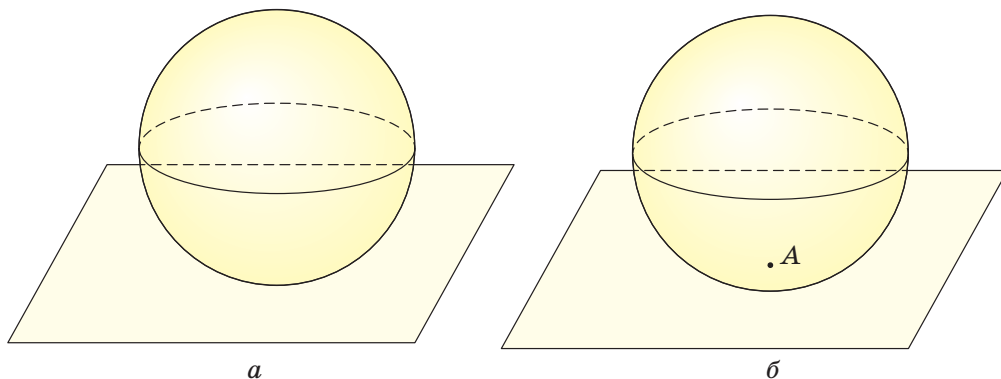


Рис. 5.31

Теорема 57. Плоскость, перпендикулярная радиусу шара (сферы) в его внешнем конце, является касательной к этому шару (сфере).

Доказательство.

1. Сф. (O, R) .
 2. Плоскость α , перпендикулярная радиусу OA , проведённому в точке A , $A \in \alpha$. } (дано) (рис. 5.32а)

3. Плоскость α является касательной к данной сфере (требуется доказать).

Нам нужно доказать, что никакая другая точка плоскости α , кроме точки A , не принадлежит нашей сфере.

4. Пусть X – любая другая точка плоскости α (построение) (рис. 5.32б).

5. Соединим точки O и A , O и X , A и X (построение) (рис. 5.32б)

6. $\triangle OAX$ – прямоугольный, $OA \perp AX$ (2,4,6, определение прямоугольного треугольника).

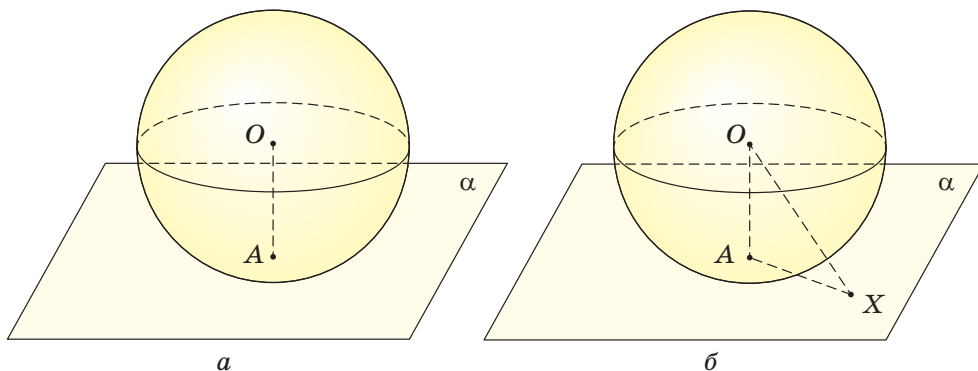


Рис. 5.32

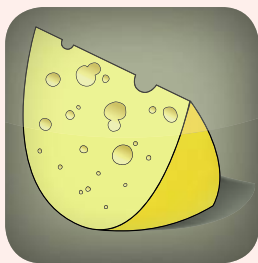
7. OA – перпендикуляр к плоскости α , а OX – наклонная, $OA < OX$ или $OX > R$ (6, свойство перпендикуляра к наклонной плоскости).

8. Точка X не принадлежит нашей сфере (X лежит вне сферы), значит, плоскость α касательная к сфере. ■

Верна и обратная теорема.

Теорема 58. Каждая касательная плоскость к сфере перпендикулярна радиусу этой сферы, проведённому в точку касания.

§ 5.5



ЧАСТИ КРУГА, СФЕРЫ И ШАРА

5.5.1 КРУГОВОЙ СЕКТОР

Определение 55. Два радиуса разбивают круг на две части, каждая из которых называется *сектором круга* или *круговым сектором*.

На рис. 5.33а радиусы OA и OB разбивают круг с центром в точке O на две части. Каждая из заштрихованных частей называется *сектором круга* или *круговым сектором*.

5.5.2 КРУГОВОЙ СЕГМЕНТ

Определение 56. Хорда разбивает круг на две части, каждая из которых называется *сегментом круга*.

На рис. 5.33б хорда AB разбивает круг с центром в точке O на две части, каждая из которых является круговым сегментом или просто сегментом.

5.5.3 ПОЛУКРУГ

Определение 57. Диаметр разбивает круг на два *полукруга* (рис. 5.33в).

Полукруг ограничен диаметром и полуокружностью. Полукруг является одновременно и сегментом, и сектором круга.

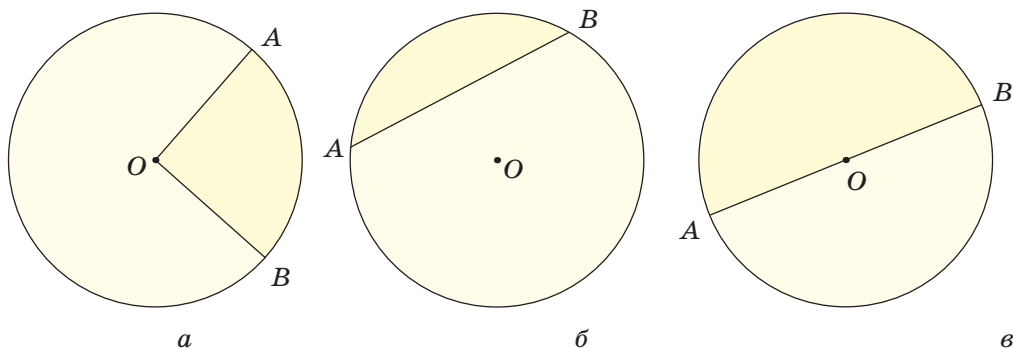


Рис. 5.33

Используя формулу площади круга, можно вывести формулу площади сектора, угловая величина дуги которого n° (рис. 5.34).

1. Площадь сектора, угловая величина дуги которого 1° , равна $\frac{\pi R^2}{360}$.

2. Площадь сектора, угловая величина дуги которого n° , равна $\frac{\pi R^2 n}{360}$,

то есть $S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2 n}{360}$.

Эта формула связывает между собой три величины: $S_{\text{сект}}$, R , n , поэтому по ней можно находить любую из этих величин, если будут известны две другие.

Чтобы найти площадь сегмента AMB (рис. 5.35), надо из площади соответствующего сектора вычесть площадь треугольника OAB , если его центральный угол $\alpha < 180^\circ$, или прибавить площадь треугольника OAB , если $\alpha > 180^\circ$.

Рассмотрим теперь часть шара и сферы.

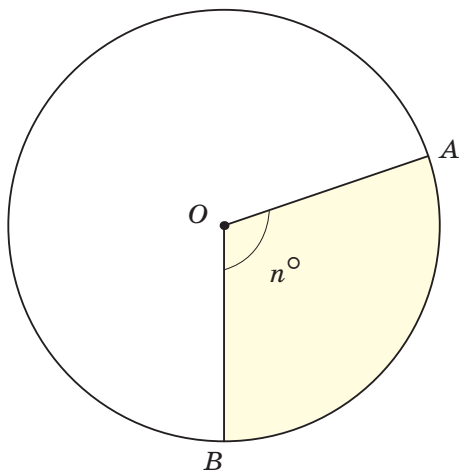


Рис. 5.34

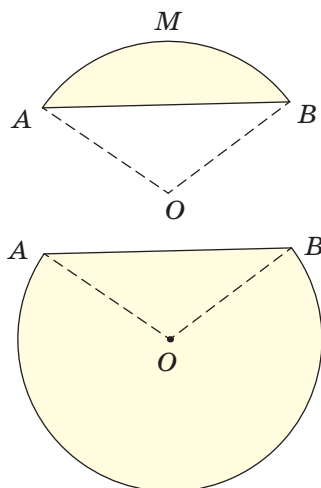


Рис. 5.35

5.5.4 ШАРОВОЙ И СФЕРИЧЕСКИЙ СЕГМЕНТЫ

Определение 58. Часть шара, отсекаемая плоскостью, называется *шаровым сегментом* (рис. 5.36).

Шаровой сегмент ограничен: 1) частью сферы, которая называется *сегментной поверхностью* или *сферическим сегментом*; 2) кругом, который называется *основанием шарового сегмента*.

На рис. 5.37 плоскость α , проходящая через точку B , отсекает от шара два шаровых сегмента.

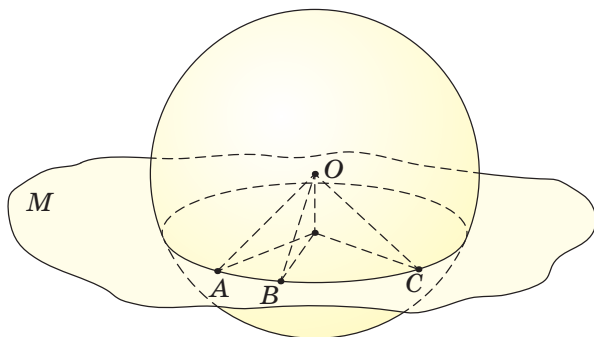


Рис. 5.36

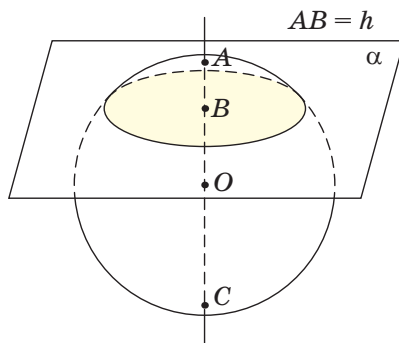


Рис. 5.37

Определение 59. *Сферическим сегментом* называется часть сферы, отсекаемая плоскостью. Окружность, по которой плоскость пересекает сферу, называется *основанием сферического сегмента*.

Высотой шарового сегмента и сегментной поверхности называется отрезок радиуса, перпендикулярного к основанию сегмента.

На рис. 5.37 верхний сегмент имеет высоту AB .

5.5.5 ШАРОВОЙ СЛОЙ И СФЕРИЧЕСКИЙ ПОЯС

Пересечём шар двумя параллельными плоскостями (рис. 5.38).

Тогда шар (и его граничная сфера) разделится на три части, две из них – *шаровые (сферические) сегменты* (см. п. 5.5.4).

Определение 60. Часть шара, заключённая между двумя пересекающимися его параллельными плоскостями, называется *шаровым слоем*. Часть сферы, заключённая между двумя её параллельными сечениями, называется *сферическим поясом*.

Поверхность шарового слоя состоит из двух кругов, называемых *основаниями* шарового слоя и сферического пояса.

На рис. 5.38 две параллельные плоскости, проходящие через точки C и B , отсекают от шара шаровой слой.

Высотой шарового слоя называется перпендикуляр, проведенный из точки одного основания к плоскости другого: чаще берут за высоту отрезок диаметра шара, перпендикулярного основаниям, с концами на них.

Высотой сферического пояса называется высота соответствующего шарового слоя. На рис. 5.38 высотой шарового слоя и сферического пояса является отрезок BC .

Сферический сегмент и сферический пояс можно рассматривать как поверхности, образованные вращением некоторых дуг окружности вокруг прямой AB (рис. 5.38).

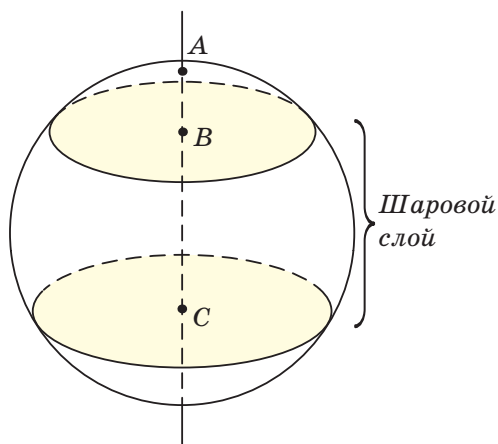


Рис. 5.38

Определение 61. Шаровым сектором называется фигура, полученная при вращении кругового сектора с углом, меньшим 90° , вокруг прямой, содержащей один из ограничивающих круговой сектор радиусов.

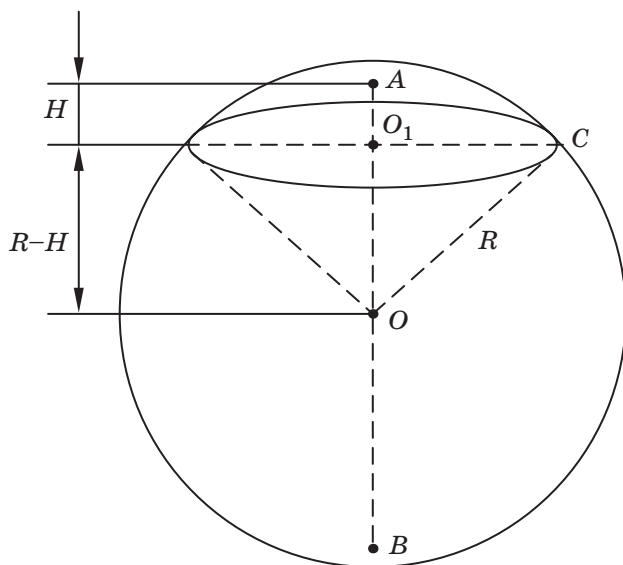


Рис. 5.39

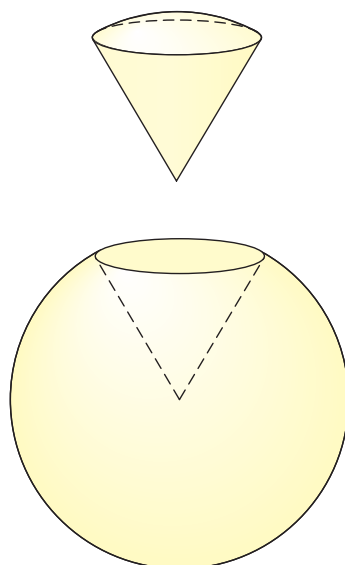
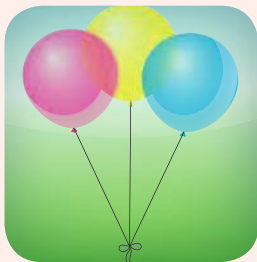


Рис. 5.40

На рис. 5.39 изображен круговой сектор COA (O – центр данного круга). Вращая круговой сектор COA вокруг радиуса AO , мы получим шаровой сектор с центром в точке O (рис. 5.40). Полученный шаровой сектор состоит из шарового сегмента высотой H и конуса с вершиной в точке O и высотой $R - H$ (пока мы говорим о конусе чисто наглядно, в курсе геометрии 11 класса мы подробно изучим свойства этой фигуры).

На рис. 5.40 сверху изображён шаровой сектор, вырезанный из шара. Он состоит из шарового сегмента, к которому «приклеен» конус. Оставшаяся часть шара тоже называется шаровым сектором. Он состоит из шарового сегмента, из которого «вырезан» конус.



ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ СФЕР (ШАРОВ)

Рассмотрим возможные случаи взаимного расположения сфер (шаров) с центрами O_1 и O_2 и радиусами r_1 и r_2 .

На рис. 5.41а изображены две сферы (шара) так, что расстояние между их центрами O_1O_2 равно d , $O_1O_2 = d$.

В учебнике геометрии для 7–9 классов мы рассматривали вопрос о взаимном расположении двух окружностей.



Как можно вопрос взаимного расположения сфер (шаров) свести к более наглядному вопросу взаимного расположения двух окружностей (кругов)?

Это можно сделать, если провести сечение данных сфер (шаров) плоскостью, проходящей через прямую, соединяющую их центры. Длины радиусов окружностей (кругов) обозначим r_1 и r_2 , $O_1O_2 = d$.

1) Если $d > r_1 + r_2$, то окружности общих точек не имеют (рис. 5.41а). При вращении окружностей (кругов) вокруг оси O_1O_2 получим данные сферы (шары), которые общих точек не имеют.

2) Если $d = r_1 + r_2$, то окружности (круги) внешне касаются в точке O (рис. 5.41б). При вращении их вокруг оси O_1O_2 получим данные сферы (шары) с общей точкой O .

3) Если $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$, то окружности (круги) пересекаются (рис. 5.41в). При вращении их вокруг оси O_1O_2 получим данные сферы (шары), у которых общая точка A опишет окружность (круг), принадлежащую обеим сферам (шарам), причём плоскость её как плоскость параллели перпендикулярна оси O_1O_2 .

4) Если $d = r_1 - r_2$ ($r_1 > r_2$), то окружности (круги) внутренне касаются в точке O (рис. 5.41г). При вращении их вокруг оси O_1O_2 получим две сферы (шара) с общей точкой O .

5) Если $d < r_1 - r_2$ ($r_1 > r_2$), то одна окружность (круг) внутри другой, общих точек они не имеют (рис. 5.41д). При вращении их вокруг оси O_1O_2 получим две сферы, не имеющие общих точек и расположенные одна внутри другой.

Две сферы (шара) с общим центром называются *концентрическими*.

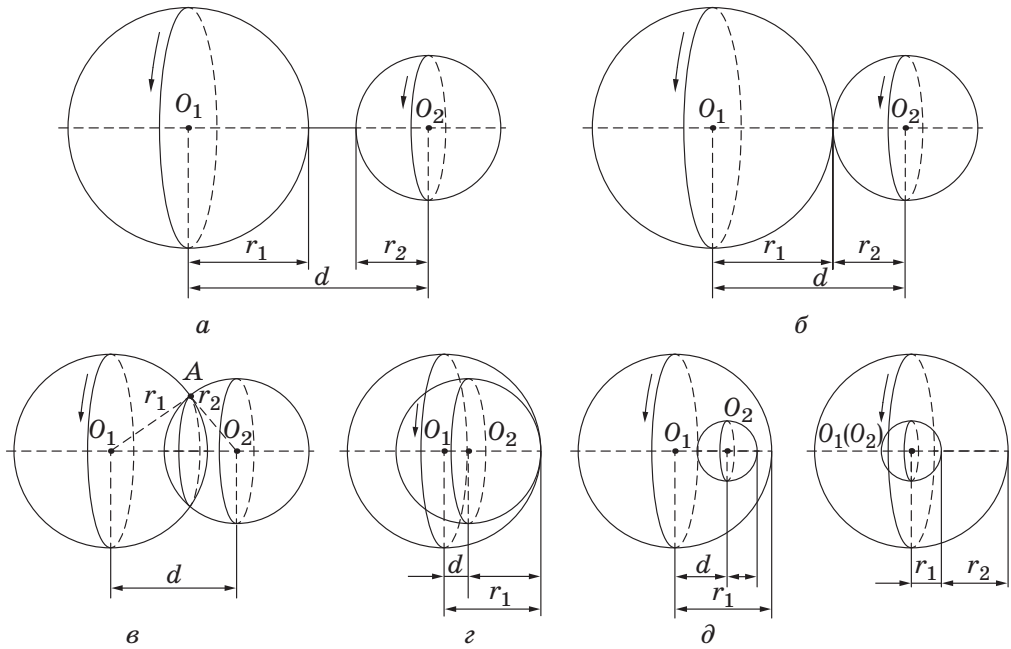


Рис. 5.41

§ 5.7*



РАССТОЯНИЯ НА ШАРЕ



Мы достаточно подробно изучили вопрос измерения длин отрезков, научились находить расстояния между точками пространства и знаем свойства этих расстояний.

? Как измеряется расстояние на поверхности шара? Как это сделать в случае, если нужно находить расстояния на поверхности Земли?

Поставим перед собой глобус и отметим на нем две точки A и B . Как можно измерить расстояние (или положить нить) на глобусе между точками A и B ? Этот путь можно проложить по разному, а значит и его длина будет разной.

Естественно желание получить кратчайший путь между этими точками.

Мы знаем, что на плоскости кратчайшее расстояние между двумя точками – длина отрезка с концами в этих точках. На сфере это не так. Натягивая на глобусе гибкую нерастяжимую нить между точками A и B (начало и конец пути), можно найти такое положение нити, при котором длина нити A будет наименьшей. Однако, положение нити относительно сетки меридианов и параллелей, нанесённой на глобус, будет различной в каждой точке вдоль всей длины AB . Это значит, что, например, моряку проложить такой путь в открытом море будет нелегко.

Можно выбрать другой способ – например, моряку двигаться всё время в одном направлении, пересекая все меридианы под одним и тем же углом. Тогда ориентироваться в море будет легче. Однако с помощью нити на глобусе легко убедиться, что такой путь будет длиннее, чем первый. Чтобы лучше представить себе каждый путь, нужно построить специальную теорию.

При изучении этой проблемы важно, чтобы точки A и B не совпадали с полюсами Земли. Попробуйте ответить на следующий вопрос.

? Если A и B – полюса Земли, то какой путь между ними окажется кратчайшим?

Кривая, длина которой является кратчайшим путём между двумя точками на поверхности шара, называется *геодезической линией*. Она представляет интерес не только для геодезистов. Эта кривая важна и для мореплавателей, лётчиков и путешественников.

Можно доказать, что при произвольном расположении двух точек на шаре кратчайшее расстояние между ними определяется по дуге большого круга, проходящего через эти точки (рис. 5.42). Иными словами, *геодезической линией на шаре является дуга большого круга*.

В нашем учебнике мы не будем доказывать это утверждение.

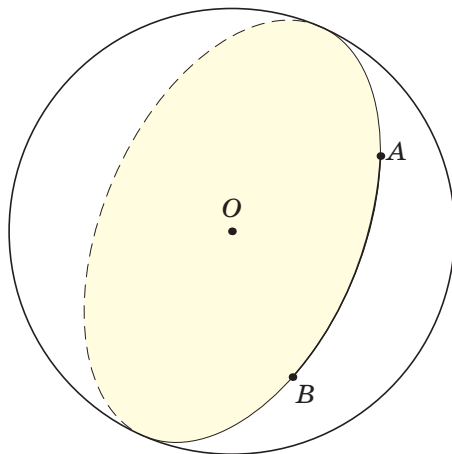


Рис. 5.42



МНОГОГРАННИКИ, ВПИСАННЫЕ В ШАР (СФЕРУ) И ОПИСАННЫЕ ОКОЛО ШАРА (СФЕРЫ)

В учебнике геометрии для 7–9-го классов в разделе 7 мы изучали свойства вписанных и описанных многоугольников.

В повседневной жизни и при решении геометрических задач нам часто придётся рассматривать вписанные и описанные многогранники: призмы (в частности, кубы), вписанные в шар; шар, вписанный в пирамиду или описанный около неё, и т.д.

Рассмотрим такие комбинации фигур подробнее. Дадим определение многогранника, вписанного в шар.

Определение 62. Если все вершины многогранника принадлежат поверхности шара, то такой многогранник называется *вписанным в шар*, а шар называется *описанным около многогранника*.

На рис. 5.43 все вершины пирамиды $PABC$ лежат на поверхности шара, поэтому пирамида является вписанной в шар, а шар описан около пирамиды.

Теперь дадим определение многогранника, описанного около шара.

Определение 63. Если все грани многогранника касаются шаровой поверхности, то такой многогранник называется *описанным около шара*, а шар называется *вписанным в многогранник*.

На рис. 5.44 грани пирамиды с вершиной в точке P касаются шара, и поэтому шар вписан в данную пирамиду. Центр шара равноудалён от всех граней многогранника.

Рассмотрим решение нескольких задач, показывающих характерные приёмы работы с описанными и вписанными многогранниками.

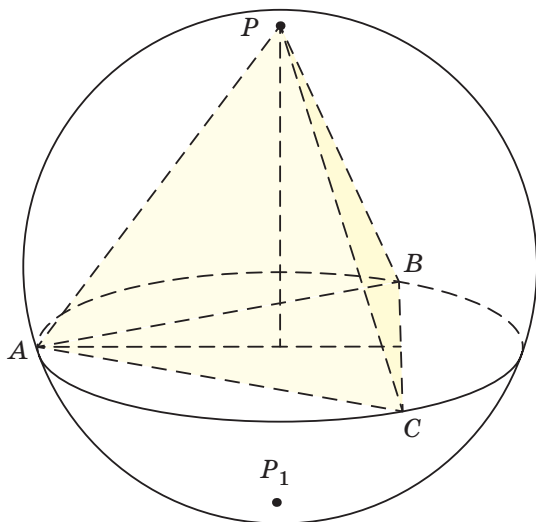


Рис. 5.43

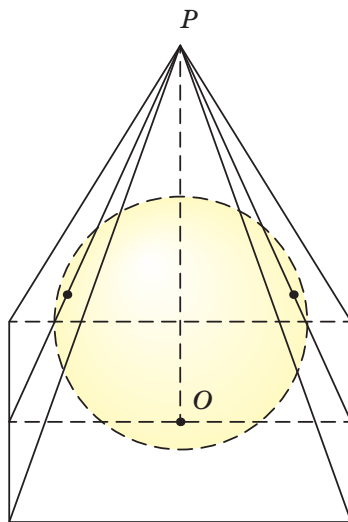


Рис. 5.44

ЗАДАЧА 1

Докажите, что около правильной призмы можно описать сферу.

1. Мы имеем правильную призму (дано) (рис. 5.45).
2. Если призма правильная, то у неё есть ось OO_1 .
3. Мы хотим доказать, что около этой призмы можно описать сферу.

Анализ. Предположим, что задача решена, и мы построили сферу, описанную около данной правильной призмы. Из этого предположения можно сделать несколько выводов (их мы затем обоснуем):

1. Центр сферы принадлежит оси правильной призмы – отрезку OO_1 , причём он является серединой этого отрезка.

2. Центр сферы – середина отрезка OO_1 , должен быть равноудалён от всех вершин правильной призмы.

Построение. Напомним, что построения в пространстве не выполняются непосредственно с помощью некоторых инструментов, а обосо-

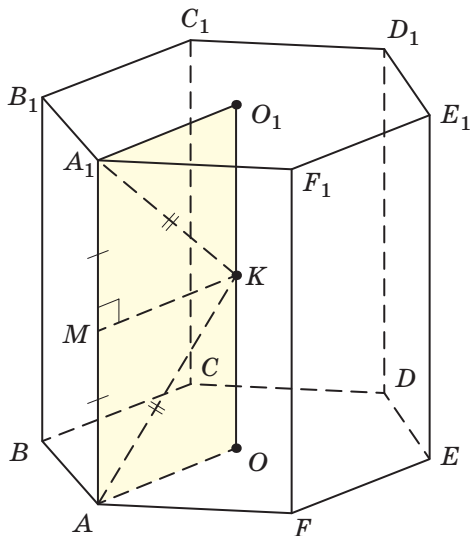


Рис. 5.45

ываются (мы убеждаемся, что такие построения возможны и мы умеем их выполнять).

В этой задаче нужно выполнить следующие построения (они подсказаны анализом):

1. Проведём в плоскости OO_1A_1A ось симметрии ребра AA_1 (рис. 5.45). Пусть она пересечёт ось призмы OO_1 в точке K .

2. Соединим точку K , например, с вершинами A и A_1 (рис. 5.45).

Мы утверждаем, что точка K – центр искомой сферы.

Доказательство.

1. Точка K лежит на оси призмы, поэтому $KA = KB = KC = \dots, KA_1 = KB_1 = \dots = KC_1 = \dots$.

2. K лежит на оси симметрии отрезка AA_1 , и поэтому $KA = KA_1$.

3. Точка K равноудалена от всех вершин призмы, поэтому она – центр описанной сферы, т.е. около правильной призмы можно описать сферу. ■

ЗАДАЧА 2

Докажите, что около правильной пирамиды можно описать сферу, и найдите её радиус.

Решение

1. Пусть у нас имеется правильная пирамида $PABC\dots$ с вершиной P и высотой PH (дано) (рис. 5.46 а).

2. Так как точка H равноудалена от всех вершин основания, то любая точка прямой PH тоже равноудалена от всех вершин основания (наклонные, имеющие равные проекции, равны).

3. Найдём на прямой PH точку O , равноудалённую от вершины пирамиды P и какой-нибудь вершины основания, например A . Тогда эта точка будет равноудалена от всех вершин пирамиды, и тем самым будет центром описанной сферы.

4. Рассмотрим прямоугольный треугольник PAH и проведём в плоскости этого треугольника серединный перпендикуляр к его гипотенузе PA . (Точка M – середина гипотенузы.) Пересечение этого перпендикуляра с прямой PH и даст искомый центр O сферы (рис. 5.46 а).

5. В прямоугольном треугольнике PAH гипотенуза PA – это боковое ребро пирамиды, катет PH – высота пирамиды, а угол PAH – угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания. Пусть боковое ребро пирамиды равно l , высота равна h , а угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен α .

6. В зависимости от величины угла α серединный перпендикуляр к отрезку PA может:

- а) либо пересечь высоту PH , и тогда центр описанной сферы будет лежать внутри пирамиды; это выполняется при $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ (рис. 5.46 б);

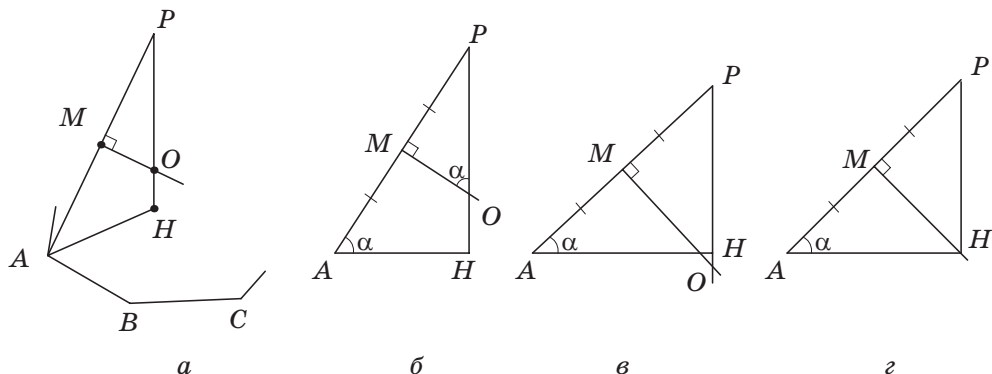


Рис. 5.46

б) либо пересечь продолжение высоты PH за точку H , и тогда центр описанной сферы будет лежать вне пирамиды; это соответствует углам $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ (рис. 5.46в);

в) либо пройти через точку H , и тогда основание высоты пирамиды будет центром описанной сферы; это справедливо при $\alpha = 45^\circ$ (рис. 5.46г).

7. Во всех перечисленных в п. 6 случаях радиус R описанной сферы из

прямоугольного треугольника PMO равен $R = \frac{l}{2\sin\alpha}$, а поскольку из прямоугольного треугольника PAH $\sin\alpha = \frac{h}{l}$, то формулу для радиуса описанной сферы можно записать также в виде $R = \frac{l^2}{2h}$. ■

ЗАДАЧА 3

Докажите, что в правильную пирамиду можно вписать сферу.

Решение

1. Мы имеем правильную пирамиду $PABCDE\dots$ (дано) (рис. 5.47).

В правильной пирамиде проведём высоту PO .

Анализ. Предположим, что мы вписали сферу в правильную пирамиду $PABCDE$ и точка K – центр этой сферы (рис. 5.47). Из этого предположения можно сделать следующие выводы:

1. Центр сферы (точка K) должен принадлежать высоте PO пирамиды (рис. 5.47)

2. Центр сферы лежит в биссекторной плоскости двугранного угла с ребром AB (нужно вспомнить или самостоятельно доказать свойства такой биссекторной плоскости).

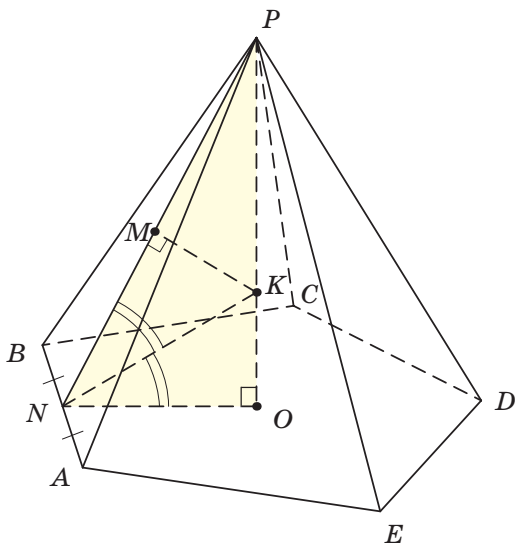


Рис. 5.47

равноудалена от боковой грани APB и основания пирамиды, т.е. $KO = KM$ (свойство биссекторной плоскости).

2. K – точка высоты правильной пирамиды, значит, она удалена на расстояние KM от всех граней пирамиды (свойство высоты правильной пирамиды).

3. K – центр вписанной сферы, а значит, в правильную пирамиду можно вписать сферу (определение вписанной сферы). ■

Чтобы вписать шар, для этого строят полукруг диаметра OO_1 , где $OO_1 = 2KO$. Его полукружность касается основания пирамиды и её апофемы. При вращении полукруга вокруг прямой OO_1 он образует шар, вписанный в пирамиду.

Решим теперь задачу на нахождение радиуса вписанной сферы (шара).

ЗАДАЧА 4

Найдите радиус шара, вписанного в правильную n -угольную пирамиду, сторона основания которой равна a , а двугранный угол при ребре основания равен β .

Решение

1. Мы имеем правильную n -угольную пирамиду со стороной основания a и двугранным углом при основании β (на рис. 5.48 изображена часть этой n -угольной правильной пирамиды, $AB = a$, вершина пирамиды – точка P , боковая грань – треугольник PAB).

(дано) (рис. 5.48)

Построение. Проведённый анализ подсказывает выполнение следующих построений:

1. Проводится высота правильной пирамиды PO (построение) (рис. 5.47).

2. Строится биссекторная плоскость двугранного угла, например, с ребром AB (рис. 5.47).

3. Эта биссекторная плоскость пересекает высоту PO в точке K (рис. 5.47). При этом отрезок NK является биссектрисой прямоугольного $\triangle PNO$.

4. K – центр искомой сферы.

Доказательство

1. Проведя биссекторную плоскость двугранного угла с ребром AB , мы получим, что точка K будет

2. Шар, вписанный в данную пирамиду.
3. Радиус шара r (требуется найти).
4. $PM \perp AB$, $OM \perp AB$, $\angle PMO$ – линейный угол двугранного угла при ребре AB , $\angle PMO = \beta$ (1, 2, определение линейного угла двугранного угла) (дано).

5. Центр шара лежит на высоте пирамиды PO , плоскость PO_1K перпендикулярна плоскости PAB (1, 2, определение вписанного шара).

6. K принадлежит PM (4, 5).

Замечание. Пункт 6 надо доказать самостоятельно.

7. $O_1K = OO_1$ (2, 5, определение шара, вписанного в пирамиду).

Мы знаем a и β , а значит r нужно выразить через эти величины.

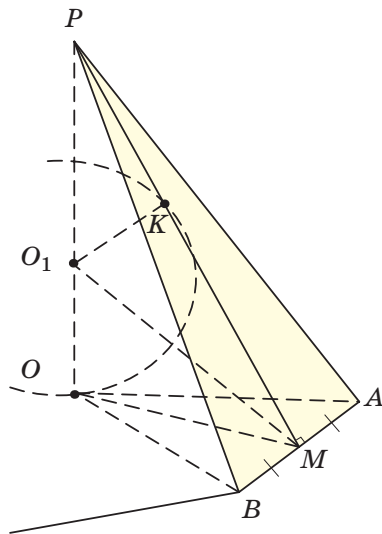


Рис. 5.48

$$8. \angle AOM = \frac{180^\circ}{n} \quad (\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}) \quad (1, \text{ свойство правильной пирамиды}).$$

9. $\triangle OO_1M = \triangle O_1KM$ (признак равенства треугольников по гипотенузе и катету).

$$10. \angle O_1MO = \frac{\beta}{2} \quad (9).$$

11. Из прямоугольного треугольника AMO имеем:

$$OM = AM \operatorname{ctg} \angle AOM = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}.$$

12. Из прямоугольного треугольника O_1MO имеем:

$$OO_1 = OM \operatorname{tg} \angle O_1MO = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}.$$

$$13(3). r = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}. \blacksquare$$

ЗАДАЧИ К §§ 5.1, 5.3, 5.4



1 На рис. 5.49 изображён шар с центром в точке O . Ответьте на вопросы.

- Какие отрезки являются радиусами шара?
- Какие отрезки являются диаметрами шара?
- Какой отрезок является хордой шара?
- Какие отрезки равны на этом рисунке?

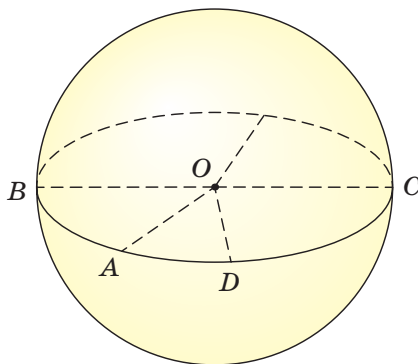


Рис. 5.49



2 Заполните пропуски, чтобы получились верные высказывания.

- Множество всех точек ... , находящихся на данном расстоянии от данной точки, называют
- Диаметром сферы называют ... , содержащий ... этой сферы.
- Хордой шара называют ... , концы которого принадлежат ... шара.

3 Заполните пропуски, чтобы получились верные высказывания.

- Если плоскость пересекает сферу, то их пересечение есть или ... , или
- Если прямая пересекает сферу, то их пересечение есть или ... , или

4 Диаметр сферы равен $\sqrt{3}$. Определите, внутри или вне сферы расположена точка A , если она удалена: а) от центра сферы на $\sqrt{2}$; б) от центра сферы на 0,85; в) от точки B , принадлежащей сфере, на 4.

5 Могут ли три точки сферы лежать на одной прямой? Объясните свой ответ.

6 Дана окружность. Сколько можно провести сфер, содержащих эту окружность?

7 Укажите, верны или ошибочны следующие утверждения:

- Все радиусы данной сферы равны.
- Каждый диаметр сферы является диаметром некоторой её большей окружности.
- Радиус окружности является её хордой.

- г) Хорда окружности содержит ровно две её точки.
- д) Сфера и её большая окружность имеют один и тот же центр и один и тот же радиус.
- е) Если радиус окружности делит пополам её хорду, не являющуюся диаметром, то он перпендикулярен этой хорде.
- ж) Пересечение прямой с окружностью может не иметь общих точек, т.е. быть пустым множеством.

- 8** Установите, верны ли следующие высказывания.
 - а) Через точку шаровой поверхности можно провести сколько угодно больших кругов.
 - б) Через две точки шаровой поверхности проходит только один большой круг.
- 9** Объясните, почему любые две большие окружности сферы пересекаются в концах некоторого диаметра этой сферы.
- 10** Две большие окружности называют перпендикулярными, если они лежат в двух перпендикулярных плоскостях. Покажите, что для любых двух больших окружностей существует третья большая окружность, перпендикулярная им обеим. Если каждая из двух данных больших окружностей является объединением двух меридианов на поверхности Земли (проходящих через полюсы), то какая большая окружность перпендикулярна им обеим?
- 11** Сколько различных сфер можно провести: а) через две данные точки; б) через три данные точки; в) через четыре данные точки?
- 12** Представим, что два шара – один большой, как земной шар, а другой, как футбольный мяч, – по «экваторам» обтянуты обручами. Если каждый обруч удлинить на 1 м, они отодвинутся от поверхностей шаров (равномерно) на некоторые расстояния. Определите, у какого шара – большего или меньшего – это расстояние будет больше.
- 13** Даны сфера и три точки на ней. Объясните, как определить центр и радиус окружности, содержащей эти три точки, зная попарные расстояния между точками и радиус сферы.
- 14** Сколько можно провести сечений плоскостью: а) через две точки поверхности шара; б) через три точки этой поверхности?
- 15** Через какие две точки шаровой поверхности можно провести бесконечное множество больших кругов? Через какие две точки шаровой поверхности можно провести только один большой круг?
- 16** На поверхности шара даны точки A и B , не лежащие на одном диаметре. Сколько можно провести через них различных сечений шара плоскостью? Сколько можно провести через них больших кругов?

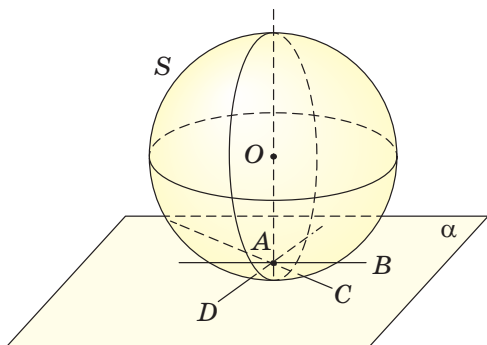


Рис. 5.50

17 На сфере проведена замкнутая линия. Каким свойством обладают все точки этой линии по отношению к центру сферы? При каком условии эта линия будет окружностью?

18 Плоскость α касается сферы S в точке A . Точка O является центром сферы S , а точки B , C и D принадлежат плоскости α (рис. 5.50). Что можно сказать о взаимном расположении прямых OA , AB , AC и AD ? Обоснуйте свой ответ.

19 Сколько существует касательных прямых к сфере, касающихся её в общей точке? Что можно сказать о множестве всех точек, лежащих на этих касательных прямых?

Н

20 Хорда сферы радиусом 15 см находится на расстоянии 9 см от центра этой сферы. Вычислите длину хорды.

21 Хорда длиной 12 см отстоит от центра сферы на 6 см. Найдите радиус сферы.

22 Докажите, что если два диаметра сферы перпендикулярны, то фигура, образованная отрезками, последовательно соединяющими их концы, является квадратом.

23 Найдите площадь большого круга и длину экватора шара, если его радиус равен 2 м.

24 Диаметр шара 38 дм, а некоторая плоскость отстоит от его центра на 20 дм. Имеет ли эта плоскость с шаром общие точки?

25 Точки A и B лежат на поверхности шара радиусом 50 см. Найдите расстояние от центра шара до отрезка AB , если длина этого отрезка 80 см.

26 На поверхности шара радиусом r даны две точки, расстояние между которыми равно радиусу шара. Найдите наименьшее расстояние между этими точками по поверхности шара.

27 Вершины равностороннего треугольника со стороной 10 см лежат на поверхности шара радиусом 10 см. Найдите расстояние от центра шара до плоскости треугольника.

- 28** Из точки M проведены к сфере две касательные прямые. Докажите, что их отрезки от точки M до точки касания имеют равные длины.
- 29** Стороны треугольника, равные a , b , c , касаются сферы радиусом R . Найдите расстояние d от центра сферы до плоскости треугольника, если $a = b = 10$ см, $c = 12$ см, $R = 5$ см.
- 30** Из точки M , взятой на сфере радиусом 30 см, проведены две взаимно перпендикулярные хорды: $MA = 24$ см и $MB = 10$ см. Ответьте на следующие вопросы.
- Проходит ли плоскость AMB через центр шара?
 - На каком расстоянии от центра шара находится хорда AB ?
- 31** а) Какая из географических параллелей является большой окружностью земного шара?
- б) Найдите длину полярного круга Земли (радиус Земли $R = 6400$ км).
- в) Вычислите длину пути, который в результате вращения Земли вокруг оси проходит за сутки населённый пункт, в котором вы живёте.
- 32** Санкт-Петербург и Магадан находятся на широте 60° севернее экватора, разность их долгот равна 120° . Найдите расстояние между этими городами: а) по параллели; б) по дуге большой окружности.
- 33** Найдите множество центров всех сфер: а) проходящих через три точки, не принадлежащие одной прямой; б) касающихся двух различных параллельных плоскостей.
- 34** а) Докажите, что концы диаметра сферы и любая другая её точка являются вершинами прямоугольного треугольника.
- б) Найдите в пространстве множество всех вершин прямоугольных треугольников с заданной общей гипотенузой.
- 35** Сфера пересечена двумя плоскостями, одинаково удалёнными от её центра; угол между плоскостями равен 30° . Общая хорда окружностей, получившихся в сечении, равна a и стягивает в одной из окружностей дугу 90° . Найдите радиус сферы.
- 36** Найдите геометрическое место центров сфер радиуса R : а) касающихся данной плоскости; б) проходящих через данную точку.
- 37** Найдите геометрическое место центров сфер, касающихся: а) данной плоскости в её данной точке; б) данной прямой в её данной точке.
- 38** На сфере радиуса 26 см даны три точки. Прямолинейные расстояния между ними 12 см, 16 см и 20 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости, проходящей через эти точки.

- 39** Две окружности, радиусы которых 30 см и 40 см, лежат на поверхности шара радиусом 50 см и в параллельных плоскостях. Найдите расстояние между этими плоскостями.
-

П

- 40** Шар пересечён плоскостью, отстоящей от его центра на 30 см. Определите радиус этого шара, если длина окружности полученного сечения составляет $\frac{4}{5}$ длины окружности его большего круга.
- 41** Даны три окружности, не лежащие в одной плоскости, причём каждая пересекает в двух точках две другие. Докажите, что через эти три окружности можно провести сферу.
- 42** На сфере δ дана окружность ω . Докажите, что прямые, проходящие через данную точку S , не принадлежащую сфере δ , и каждую точку окружности ω , пересекают сферу вторично в точках, принадлежащих некоторой окружности.
- 43** Дана замкнутая ломаная $ABCD$. Докажите, что если отрезки AB , BC , CD и DA касаются сферы, то точки касания принадлежат одной плоскости.
- 44** Постройте сферу, проходящую через данные точки A и B и касающуюся данных плоскостей α и β . (Рассмотрите общий случай расположения точек и плоскостей.)
- 45** Постройте сферу, проходящую через данную точку и касающуюся трёх данных плоскостей, имеющих только одну общую точку.

ЗАДАЧИ К § 5.5

Н

- 46** а) Докажите, что если секущая плоскость не проходит через центр сферы, то радиус сечения меньше радиуса большой окружности.
б) Докажите, что из двух сечений сферы больший радиус имеет то сечение, плоскость которого ближе к центру сферы.
- 47** Докажите, что если две плоскости пересекают сферу и их расстояния от центра сферы равны, то их пересечения со сферой представляют собой либо две точки, либо две равные окружности.
- 48** Докажите, что произведение длин отрезков хорд шара, проходящих через одну и ту же точку, есть постоянная величина для данного шара.
- 49** Радиус сферы 63 см. Точка касательной плоскости находится на расстоянии 16 см от точки касания. Найдите точки сферы, которые находятся на наименьшем и наибольшем расстоянии от данной точки. Каковы эти расстояния?

- 50** Космонавт Герман Титов во время полёта на корабле «Восток-2» имел наибольшее удаление от поверхности Земли 257 км. Найдите: а) угол зрения космонавта, под которым он видел Землю; б) расстояние до наиболее удаленной от него точки Земли. Радиус Земли $R = 6\,400$ км.
- 51** Радиус сферы $OM = r$. Через точку сферы M проведены две плоскости: одна касательная, другая под углом 30° к первой. Найдите площадь полученного сечения.
- 52** Границы тела – две концентрические сферы (полый шар). Докажите, что его сечение плоскостью, проходящей через центр, равновелико сечению, касательному к внутренней поверхности полого шара.
- 53** На каком расстоянии от телевизионной башни передающей станции можно принять телепередачу, если высота башни равна: а) 150 м; б) 308 м; в) 537 м?
- 54** Шар радиуса 10 см пересечён плоскостями, находящимися на расстоянии 4 см и 5 см от его центра. Какое сечение имеет большую площадь? Вычислите отношение площадей этих двух сечений.
- 55** Плоскость, проходящая через точку M , принадлежащую сфере радиуса R , составляет с радиусом, проведенным в эту точку, угол α . Найдите радиус сечения.
- 56** Внутри сферы даны точки A и B . Проведите через эти точки плоскость, пересекающую сферу по окружности наименьшего радиуса.
- 57** Радиус шара равен r . Через конец радиуса проведена плоскость под углом α к нему. Найдите площадь сечения шара.
- 58** В шаре радиуса 26 см на расстоянии 10 см от его центра проведена секущая плоскость. Найдите площадь сечения.
- 59** Шар радиуса 41 дм пересечён плоскостью на расстоянии 9 дм от центра. Найдите площадь сечения.
- 60** Радиус шара равен 2. Секущая плоскость удалена от его центра на расстояние x . Определите зависимость площади сечения S от x .
- 61** Шар радиуса 20 см касается плоскости. Точка A лежит в этой плоскости и находится на расстоянии 25 см от центра шара. Найдите расстояние от этой точки до точки касания.
- 62** Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная к нему плоскость. Как относится площадь сечения к площади большого круга?
- 63** Радиус шара равен R . Найдите площадь сечения, удаленного от центра шара на половину радиуса.
- 64** Площадь сечения шара равна $12,56$ дм², плоскость сечения отстоит от центра шара на 15 см. Можно ли построить в данном шаре сечение, площадь которого будет в два раза больше площади данного сечения?

- 65** Радиус шара равен r . Через конец радиуса проведена плоскость под углом 60° к нему. Найдите площадь сечения шара.
- 66** К сфере проведены две скрещивающиеся касательные. Докажите, что множество всех точек касания касательных к сфере, пересекающих данные две касательные, есть пара окружностей.
- 67** а) Докажите, что через четыре точки, не принадлежащие одной плоскости, можно провести сферу и притом только одну.
б) Докажите, что через окружность и точку, не принадлежащую её плоскости, можно провести сферу и притом только одну.
- 68** Две окружности лежат в параллельных плоскостях. При выполнении какого условия через эти две окружности можно провести сферу?
- 69** Две окружности, расположенные в различных плоскостях, имеют две общие точки. Докажите, что через эти окружности можно провести сферу и притом только одну.
- 70** Даны два прямоугольника $ABCD$ и ABC_1D_1 . Докажите, что все вершины этих прямоугольников принадлежат одной сфере.
- 71** Докажите, что окружность, не лежащая на сфере, не может иметь со сферой более двух общих точек.
- 72** Из точки M , взятой на сфере радиуса 30 см, проведены две взаимно перпендикулярные хорды MA и MB длиной 24 см и 10 см соответственно. Ответьте на вопросы:
а) Проходит ли плоскость AMB через центр сферы?
б) На каком расстоянии от центра сферы находится хорда AB ?
- 73** Точки A, B, C принадлежат сфере радиуса 25 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости ABC , если хорды, соединяющие данные точки, равны: а) $AB = 40$ см, $AC = 32$ см, $BC = 20$ см; б) $AB = 21$ см, $AC = 17$ см, $BC = 10$ см.
- 74** В шаре из одной точки его поверхности проведены три взаимно перпендикулярные хорды. Докажите, что сумма их квадратов постоянна для данного шара.
- 75** Плоскость α касается сферы в точке A . Докажите, что сечения сферы с плоскостями, проходящими через точку A и составляющими равные углы с плоскостью α , имеют равные радиусы.
- 76** Две касательные плоскости к сфере пересекаются по прямой a . Докажите, что прямая, соединяющая точки касания, перпендикулярна прямой a .

- 77** Окружность является сечением сферы. Докажите, что прямая, касательная к этой окружности, является также прямой, касательной к сфере.
- 78** Скрещивающиеся прямые l_1 и l_2 касаются сферы. Проведите прямую l_3 , пересекающую прямые l_1 и l_2 и касающуюся сферы.
- 79** Две плоскости касаются сферы в точках T_1 и T_2 . Касательная прямая к сфере пересекает эти плоскости в точках A и B . Вычислите расстояние AB , если $AT_1 = d_1$, $BT_2 = d_2$.

Н

- 80** В каких границах меняется в шаре радиуса R высота h : а) сферического пояса; б) шарового сегмента; в) шарового сектора; г) шарового слоя, оба основания которого расположены по одну сторону центра?

Н

- 81** Радиус шара равен 50 см, радиус основания шарового сегмента 14 см. Найдите высоту сегмента.
- 82** Дуга AB окружности радиусом R вращается вокруг диаметра, проходящего через точку A . Найдите длину окружности основания и высоту получившейся сегментальной поверхности, если градусная мера дуги равна φ .
- 83** Радиус сферического сегмента равен r , угловая величина дуги в осевом сечении α . Найдите: а) длину его основания; б) высоту.
- 84** Радиусы оснований сферического пояса равны r_1 и r_2 , высота пояса равна h . Найдите радиус шара.
- 85** Площади оснований шарового слоя относятся как $16 : 9$, радиус одного из оснований 8 см, радиус шара 10 см. Найдите высоту слоя. (Рассмотрите два случая).
- 86** Радиус сферического пояса равен r . Углы, под которыми видны из центра сферы диаметры его оснований, равны α и β . Найдите высоту пояса.
- 87** Найдите площадь сектора AOB , где AB — сторона квадрата, вписанного в окружность с центром O и радиусом 4 см.
- 88** Найдите площадь сегмента, если его радиус равен r , а угловая мера дуги составляет n° .
- 89** Вычислите площадь сектора радиуса 5 см с угловой мерой дуги: а) 36° ; б) 12° ; в) 144° .

- 90** Площадь сектора равна $9,42 \text{ дм}^2$, а угловая мера дуги этого сектора 120° . Найдите радиус круга, частью которого является этот сектор.
- 91** Для сбора сосновой смолы изготавливают сосуды из жести в форме воронки и прикрепляют их к дереву. Сколько квадратных метров жести понадобится для изготовления такой воронки, если каждую свёртывают из полукруга (рис. 5.51), а длина окружности края получившейся воронки равна $31,4 \text{ см}$?

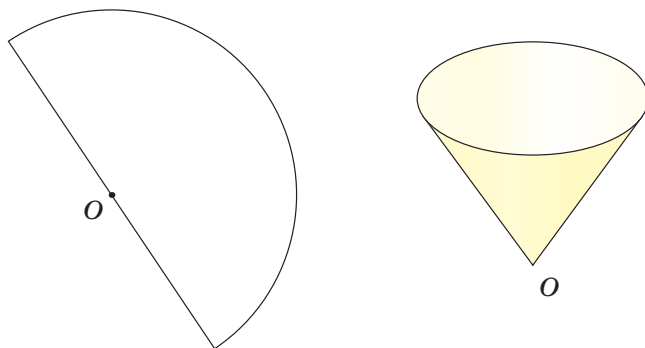


Рис. 5.51

- 92** Найдите площадь общей части круга диаметром AB и треугольника ABC , если $AB = BC = CA = a$ (рис. 5.52).
- 93** Дан сектор с углом 60° . Найдите отношение площадей этого сектора и вписанного в него круга (рис. 5.53).

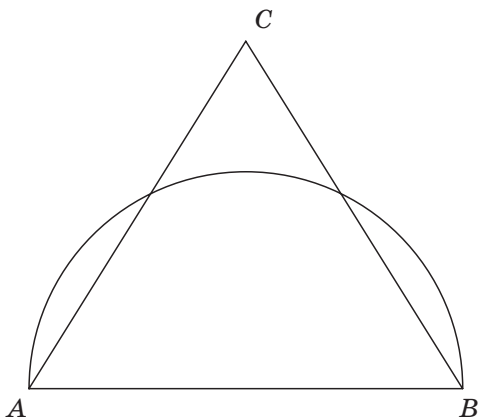


Рис. 5.52

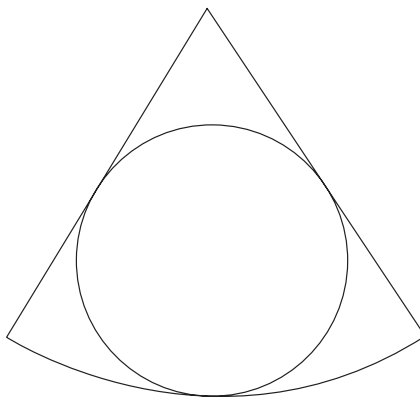


Рис. 5.53

П

- 94** В шаровом слое с равными основаниями поверхность пояса равновелика сумме оснований слоя. Найдите угловую меру дуги осевого сечения.

ЗАДАЧИ К § 5.6

Н



- 95** Верны или ошибочны следующие утверждения?
а) Две окружности могут пересекаться ровно в трёх точках.
б) Прямая может иметь с окружностью ровно одну общую точку.
в) Две сферы могут пересекаться ровно в одной точке.
г) Две сферы могут пересекаться по окружности.
д) Если прямая имеет со сферой одну общую точку, то она имеет с этой сферой еще одну общую точку.
- 96** Можно ли к любым двум сферам провести: а) общую касательную прямую; б) общую касательную плоскость. Нужно ли в каком-нибудь из названных случаев наложить какие-либо условие на расположение этих сфер?
- 97** Длина радиусов шаров 5 см и 3 см, расстояние между их центрами 2 см. Найдите площадь сечения большего шара плоскостью: а) перпендикулярной их общей оси и касающейся меньшего шара; б) параллельной их общей оси и касающейся меньшего шара.

Н

- 98** Каково взаимное расположение двух сфер, у которых длины радиусов и расстояние между центрами соответственно равны: а) 1, 2, 3; б) 1, 5, 3; в) 7, 9, 20; г) 3, 5, 2; д) 2, 7, 6?
- 99** Радиусы шаров имеют длины 2 см и 5 см, расстояние между их центрами 3 см. Как эти шары расположены по отношению друг к другу?
- 100** Фигура вращения ограничена двумя сферами, имеющими общий центр. Докажите, что сечение фигуры плоскостью, проходящей через центр, равновелико сечению фигуры плоскостью, касательной к внутренней сфере.
- 101** На плоскости расположены n шаров радиусом r так, что каждый из них касается двух других. Найдите радиус наибольшего шара, который можно положить на эту же плоскость так, чтобы он прошёл через образовавшееся отверстие.

П

- 102** Докажите, что шесть точек попарного касания четырёх сфер всегда лежат на одной сфере или в одной плоскости.
- 103** Точки A и B – общие для трёх сфер с центрами O_1, O_2, O_3 . Из точки A проводят диаметры $AO_1C_1, AO_2C_2, AO_3C_3$. Докажите, что точки B, C_1, C_2, C_3 лежат в одной плоскости.
- 104** Докажите следующие утверждения.
- а) Радиусы, проведённые в точку касания двух шаров, лежат на одной прямой. Расстояние между центрами касающихся шаров равно сумме или разности их радиусов.
 - б) Если плоскость проходит через центры касающихся шаров, то она содержит точку касания.
- 105** В треугольнике ABC сторона AB равна 2, сторона BC равна 4 и $\angle B = 60^\circ$. Три шара касаются плоскости треугольника ABC соответственно в точках A, B, C и попарно касаются между собой. Определите радиусы этих шаров.

М

- 106** В часть пространства, заключённую между сферической поверхностью и плоскостью, проходящей через её центр, вложено три одинаковых шара с радиусами r так, что каждый шар касается двух других, сферической поверхности и указанной плоскости. Найдите радиус сферической поверхности.
- 107** Дан куб с основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$). В трёхгранный угол A куба вписан шар радиусом $R = 0,5$ см. Найдите радиус шара, вписанного в трёхгранный угол C_1 куба и касающегося данного шара, если ребро куба $a = 1,5$ см.
- 108** В правильную треугольную пирамиду с ребром основания a и двугранным углом при основании, равным 60° , вложены три шара одинаковых радиусов так, что каждый шар касается двух других, плоскости основания и двух боковых граней пирамиды. Найдите радиус каждого шара.
- 109** Два шара касаются плоскости P в точках A и B и расположены по разные стороны от этой плоскости. Расстояние между центрами шаров равно 10. Третий шар касается внешним образом двух данных шаров, а его центр O лежит в плоскости P . Известно, что $AO = BO = 2\sqrt{10}$, $AB = 8$. Определите радиус третьего шара.

- 110** В куб с ребром a вписан шар. Найдите радиус шара, касающегося данного шара и трёх смежных граней куба.
- 111** В двугранный угол 60° вписаны два шара радиусом R , касающиеся друг друга. Найдите радиус шара, вписанного в тот же угол и касающегося обоих данных шаров.

ЗАДАЧИ К § 5.8

Призмы, описанные около шара и вписанные в него

П

- 112** Докажите, что: а) около куба можно описать сферу; б) в куб можно вписать сферу.
- 113** Ребро куба равно a . Найдите радиус шара: а) вписанного в куб; б) описанного около куба.
- 114** Докажите, что около прямоугольного параллелепипеда можно описать шар.
- 115** Измерения прямоугольного параллелепипеда 4 см, 6 см и 12 см. Найдите радиус описанного около него шара.
- 116** Докажите, что если все грани параллелепипеда равновелики, то в него можно вписать сферу. Убедитесь в том, что его диагональные сечения, не имеющие общей диагонали, перпендикулярны.
- 117** Основанием призмы служит треугольник со сторонами a , b , c . Высота призмы h . Найдите радиус описанной около неё сферы.
- 118** Найдите площадь полной поверхности призмы, описанной около сферы, если площадь основания призмы равна S .
- 119** Радиус шара 9 дм. В него вписана правильная четырёхугольная призма с высотой 14 дм. Найдите сторону её основания.
- 120** При каком условии в правильную призму можно вписать шар?
- 121** Боковое ребро правильной треугольной призмы равно 2 м, сторона основания 3 м. Найдите: а) диаметр описанного шара; б) угол, под которым видно из центра боковое ребро.
- 122** Около шара радиусом r описана правильная треугольная призма. Найдите сторону основания призмы.
- 123** Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно a . Найдите центр сферы, проходящей через точки A , A_1 и касающейся грани двугранного угла с ребром CC_1 .

- 124** Докажите, что около призмы можно описать сферу тогда и только тогда, когда призма прямая и около её основания можно описать окружность.

После доказательства этого утверждения докажите справедливость следующих следствий:

- а) около всякой правильной призмы можно описать сферу;
- б) около всякой прямой треугольной призмы можно описать сферу;
- в) около всякого прямоугольного параллелепипеда можно описать сферу;
- г) центр описанной около призмы сферы равноудалён от плоскостей оснований призмы и может находиться внутри призмы, на её боковой грани (в центре описанной около грани окружности), вне призмы.

- 125** Докажите, что в призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда в перпендикулярное сечение призмы можно вписать окружность и высота призмы равна диаметру этой окружности.

После доказательства этого утверждения докажите справедливость следующих следствий:

- а) в правильную призму можно вписать сферу, если и только если высота призмы равна диаметру окружности, вписанной в основание призмы;
- б) в треугольную призму можно вписать сферу, если и только если высота призмы равна диаметру окружности, вписанной в перпендикулярное сечение призмы;
- в) центр сферы, вписанной в призму, расположен внутри призмы и равноудален от плоскостей её оснований (как и от боковых граней).

- 126** а) Докажите, что сфера, касающаяся всех рёбер призмы, существует тогда и только тогда, когда призма правильная и все её ребра равны между собой.

- б) Докажите, что если существует сфера, касающаяся всех рёбер призмы, то около такой призмы можно описать сферу
- в) Верно ли утверждение, обратное утверждению б)?

- 127** Призма такова, что существуют вписанная в призму и описанная около неё сферы. Докажите, что эти сферы концентричны тогда и только тогда, когда призма правильная.

- 128** Докажите, что два шара – один, касающийся всех рёбер призмы, а второй, касающийся всех граней призмы, существуют тогда и только тогда, когда призма есть куб.

- 129** Докажите, что из всех призм, описанных около сферы, правильная имеет наименьшие: а) периметр основания, б) площадь основания, в) боковую поверхность, г) полную поверхность; д) объём.

(Используйте известный из планиметрии факт: из всех многоугольников, описанных около окружности, наименьший периметр и наименьшую площадь имеет правильный многоугольник).

- 130** Около правильной n -угольной призмы, сторона основания которой a и высота h , описана сфера. Найдите радиус сферы.
- 131** Радиус шара равен R . В шар вписана правильная n -угольная призма, высота которой $2h$. Найдите сторону основания призмы.
- 132** Сторона основания правильной треугольной призмы a , 2α — угол, образованный диагоналями боковых граней, проведёнными из одной вершины. Определите радиус описанного шара.
- 133** В правильную треугольную призму с высотой h вписана сфера. Найдите радиус шара, касающегося сферы, основания призмы и двух боковых граней.
- 134** Сфера касается всех боковых рёбер правильной четырехугольной призмы и её оснований. Найдите отношение площади части сферы, лежащей вне призмы, к площади полной поверхности призмы.
- 135** В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $BA = 4a$, $BC = BB_1 = a$. Сфера, вписанная в трёхгранный угол с вершиной B , касается диагонали AC_1 . Определите радиус сферы.
- 136** В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ рёбра AB , AD , AA_1 соответственно равны 3, 2, 1. Найдите радиус шара, вписанного в трёхгранный угол при вершине A и касающегося диагонали BD_1 .
- 137** Около шара описана прямая призма, основанием которой служит ромб. Большая диагональ призмы составляет с плоскостью основания угол α . Найдите острый угол ромба.
- 138** Три шара радиуса r лежат на нижнем основании правильной треугольной призмы, причём каждый из них касается двух других шаров и двух боковых граней призмы. На этих шарах лежит четвёртый шар, который касается всех боковых граней и верхнего основания призмы. Определите высоту призмы.
- 139** Вычислите длину рёбер правильной треугольной призмы, зная радиус R описанного шара и угол наклона α радиуса этого шара, проведенного в вершину призмы, к боковой грани, содержащей эту вершину.
- 140** Найдите величину части поверхности правильной четырёхугольной призмы, заключённой внутри шара, если шар проходит через вершины нижнего основания призмы и касается плоскости верхнего основания. Сторона основания призмы $2a$, а её высота $2a(\sqrt{3} + 1)$.

- 141** В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат со стороной a , высота параллелепипеда b . Найдите радиус сферы, проходящей через концы стороны AB основания и касающейся плоскостей граней параллелепипеда, параллельных AB .
- 142** В сферу вписана правильная треугольная призма, длина каждого ребра которой a . Подобная ей призма нижним основанием лежит на верхнем основании данной призмы, а вершины её верхнего основания принадлежат сфере. Найдите длину ребра второй призмы.

Пирамиды, вписанные в шар и описанные около него

П

- 143** В шар радиусом 4 вписана правильная четырёхугольная пирамида, боковое ребро которой составляет с основанием пирамиды угол 30° . Найдите длину бокового ребра.
- 144** Найдите радиус шара, вписанного в правильную пирамиду, высота которой равна h , если двугранный угол при основании: а) 60° ; б) α .
- 145** В правильной треугольной усечённой пирамиде высота 17 см, радиусы окружностей, описанных около оснований, 5 см и 12 см. Найдите радиус шара, описанного около этой усечённой пирамиды.
- 146** Найдите радиус шара, вписанного в треугольную пирамиду, все рёбра которой имеют длину a .
- 147** Найдите радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, если длина бокового ребра a , а угол между боковым ребром и плоскостью основания 60° .
- 148** Укажите множества точек, пересечением которых является центр сферы: а) описанной около пирамиды; б) описанной около призмы.
- 149** Около сферы описана усечённая пирамида, большим основанием которой служит треугольник ABC , где $AB = AC = b$, $\angle BAC = \alpha$. Боковые грани, проходящие через AB и AC , перпендикулярны основанию, а третья боковая грань образует с ним двугранный угол β . Найдите радиус сферы.
- 150** Рёбра тетраэдра имеют длину a . Найдите радиус шара, касающегося всех его рёбер.
- 151** В правильной четырёхугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α ; в неё вписан шар радиуса r . Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

- 152** Расстояние от центра сферы, вписанной в правильную пирамиду, до ребра основания пирамиды в два раза больше радиуса сферы. Найдите величину двугранного угла при ребре основания пирамиды.
- 153** В четырёхугольную пирамиду вписан шар радиусом r . Найдите расстояние от центра шара до каждой из вершин и до каждого из рёбер этой пирамиды, если все рёбра пирамиды равны.
- 154** Докажите, что для того, чтобы вокруг пирамиды можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы вокруг основания пирамиды можно было описать окружность.
- 155** Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с катетами a и b , все боковые рёбра пирамиды равны m . Найдите радиус сферы, описанной вокруг пирамиды.
- 156** Докажите, что около всякой треугольной пирамиды можно описать сферу.
- 157** Докажите, что во всякую пирамиду, двугранные углы которой при основании имеют равные значения, можно вписать сферу.
- 158** В треугольной пирамиде $ABCD$ $AB = CD$, $BC = DA$. Докажите, что прямая, проходящая через середины M и N рёбер AC и BD , проходит через центр O сферы, вписанной в эту пирамиду, и центр I сферы, описанной вокруг пирамиды.
- 159** Около правильной шестиугольной пирамиды, боковое ребро которой составляет с основанием угол 60° , описан шар. Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и сечением, проведённым через сторону основания и центр описанного шара.
- 160** Около правильной треугольной пирамиды, боковое ребро которой составляет с основанием угол 30° , описан шар. Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и сечением, проведённым через сторону основания и центр описанного шара.
- 161** В шар радиусом R вписана пирамида с квадратным основанием. Одно из боковых рёбер пирамиды перпендикулярно плоскости основания, а наибольшее боковое ребро образует с ней угол α . Определите площадь боковой поверхности пирамиды.
- 162** Докажите, что существует в общем случае восемь сфер, касающихся плоскостей граней треугольной пирамиды. Число этих сфер равно 7, если $S_1 = S_2 \neq S_3 = S_4$; это число равно 6, если $S_1 = S_2 = S_3 \neq S_4$; это число равно 5, если $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ (S_1, S_2, S_3, S_4 – площади граней пирамиды).

- 163** В сферу вписана треугольная пирамида. Докажите, что точка, диаметрально противоположная одной из вершин треугольной пирамиды, одинаково удалена от плоскостей граней этой пирамиды.
- 164** В треугольную пирамиду вписана сфера. Докажите, что углы α , β , γ , под которыми из точки касания сферы с гранью видны рёбра этой грани, одни и те же для всех четырёх граней.
- 165** Докажите, что если для треугольной пирамиды $ABCD$ выполняются условия $AB + CD = BC + AD = CA + BD$, то существует сфера, касающаяся всех её рёбер.

ДОПОЛНЕНИЕ

ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Невозможно чувствовать удовлетворение от того, что в некоторой теории сказано всё, пока она не может быть объяснена в нескольких словах любому прохожему, с которым вы встретитесь на улице.

*Жозеф Диас Жергонн
(французский математик, 1771–1859)*

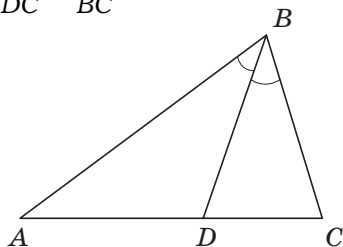


СВОЙСТВО БИСSEKTRИСЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

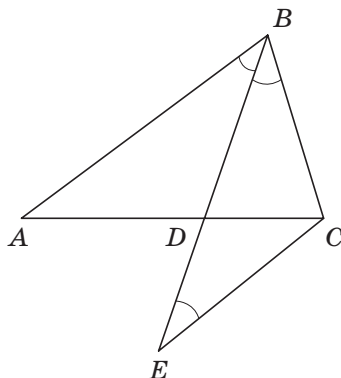
Теорема 59. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, отношение которых равно отношению прилежащих сторон.

Доказательство

1. Треугольник ABC .
 2. Точка D , принадлежащая стороне AC , причём $\angle ABD = \angle CBD$, т.е. BD – биссектриса $\angle ABC$.
- } (дано) (рис. Д. 1а)
3. $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ (требуется доказать).



а



б

Рис. Д.1

4. Продолжим биссектрису BD за точку D . Проведём через вершину C прямую, параллельную стороне AB , до пересечения с продолжением биссектрисы в точке E (построение) (рис. Д. 1б).

5. Треугольники ABD и CED подобны по двум углам ($\angle ADB = \angle EDC$ как вертикальные, $\angle ABD = \angle CED$ как внутренние накрест лежащие при параллельных AB и CE и секущей BE).

6. Из подобия треугольников ABD и CED следует равенство отношений их соответственных сторон: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{EC}$ (5, свойство подобных треугольников).

7. $\angle ABD = \angle CEB$ и $\angle ABD = \angle CBD$, следовательно, $\angle CEB = \angle CBD$, и треугольник BCE – равнобедренный, $BC = EC$ (5, 2, свойство равнобедренного треугольника).

8 (3). Подставив в равенство $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{EC}$ вместо EC равное ему BC , получим требуемое $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ (6, 7). ■

Верна и теорема, обратная доказанной.

Перед тем, как формулировать и доказывать обратную теорему, докажем сначала одну полезную вспомогательную теорему, которая неоднократно будет использоваться в дальнейшем.

Теорема 60. Если две точки делят отрезок в одинаковом отношении, считая от одного и того же его конца, то эти точки совпадают.

Доказательство

1. Отрезок EF .
2. Точки K и L , принадлежат отрезку EF .
3. $\frac{EK}{KF} = \frac{EL}{LF}$.

(дано)

4. Точки K и L совпадают (требуется доказать).
5. Предположим, что утверждение теоремы неверно, и точки K и L не совпадают (предположение).

6. Поскольку по предположению п.5 точка K не совпадает с точкой L , то возможны два случая: либо точка K лежит между точками E и L (рис. Д. 2а), либо точка K лежит между точками L и F (рис. Д. 2б).



Рис. Д. 2

7. В первом случае $EK < EL$ и $KF > LF$ (рис. Д. 2а). Записав второе неравенство в виде $\frac{1}{KF} < \frac{1}{LF}$ и перемножая его с первым неравенством (два неравенства одинакового смысла с положительными частями), получим $\frac{EK}{KF} < \frac{EL}{LF}$, что противоречит равенству $\frac{EK}{KF} = \frac{EL}{LF}$ (3).

8. Аналогичное противоречие получается и во втором случае (рис. Д. 26).

9 (4). Теорема доказана (5, 7, 8). ■

Теперь докажем наконец теорему, обратную теореме 59.

Теорема 61. Если на стороне AC треугольника ABC взята такая точка M , что $\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC}$, то BM – биссектриса угла ABC .

Доказательство

1. Треугольник ABC .

2. Точка M принадлежит стороне AC ,

причём $\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC}$.

} (дано)

3. BM – биссектриса угла ABC (требуется доказать).

4. Предположим, что утверждение теоремы неверно, и BM – не биссектриса (предположение).

5. Проведём из вершины B биссектрису BD (построение).

6. По теореме 59 имеем $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

7. Из п.2 и п.5 заключаем, что $\frac{AM}{MC} = \frac{AD}{DC}$.

8 (3). Из теоремы 60 следует, что точки D и M совпадают, т.е. BM – биссектриса (6, Т. 60). ■

Теоремы 59 и 61 могут быть обобщены на случай, когда берётся биссектриса внешнего угла треугольника. Для того чтобы рассмотреть такое обобщение теоремы 59, сначала переформулируем её немного по-другому:

Биссектриса внутреннего угла треугольника пересекает противоположную сторону в точке, отношение расстояний от которой до концов этой стороны равно отношению соответствующих прилежащих сторон треугольника.

Убедитесь самостоятельно, что эта формулировка теоремы 60 равносильна приведённой ранее на с. 256.

Теперь сформулируем и докажем теорему о биссектрисе внешнего угла треугольника.

Теорема 62. Биссектриса внешнего угла треугольника пересекает продолжение противоположной стороны в точке, отношение расстояний от которой до концов этой стороны равно отношению соответствующих прилежащих сторон треугольника.

Доказательство

1. Треугольник ABC .
 2. Биссектриса внешнего угла при вершине B пересекает продолжение стороны AC в точке D .
- } (дано) (рис. Д. 3а)
3. $\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{CB}$ (требуется доказать).

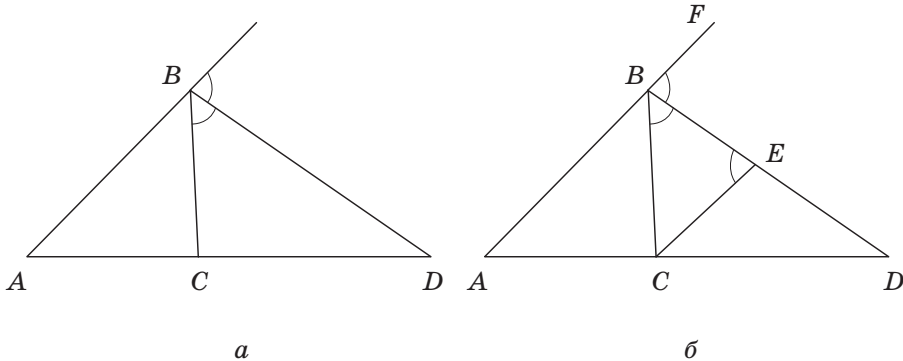


Рис. Д. 3

4. Проведём через вершину C прямую, параллельную стороне AB , до пересечения с биссектрисой в точке E (построение) (рис. Д. 3б).

5. Треугольники ABD и CED подобны, поскольку второй из них отсекается от первого прямой CE , параллельной его стороне AB .

6. Из подобия треугольников ABD и CED следует равенство отношений их соответственных сторон: $\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{CE}$ (5, свойство подобных треугольников).

7. $\angle FBE = \angle CEB$ как внутренние накрест лежащие при параллельных AB и CE и секущей BE .

8. $\angle FBE = \angle CEB$ и $\angle FBE = \angle CBE$, т.к. BD – биссектриса $\angle CBE$, следовательно, $\angle CEB = \angle CBE$, и треугольник BCE – равнобедренный, $CB = CE$ (7, свойство равнобедренного треугольника).

9 (3). Подставив в равенство $\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{CE}$ вместо CE равное ему CB , получим требуемое $\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{CB}$ (6, 8). ■

Сформулируйте и докажите самостоятельно теорему, обратную теореме 62.



ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА

В учебнике геометрии для 7–9 классов были выведены и широко использовались при решении задач три основные формулы для площади треугольника:

1) $S = \frac{1}{2}ah$, где a – сторона треугольника, h – проведённая к этой стороне

высота;

2) $S = \frac{1}{2}bcsin A$, где b , c – стороны треугольника, A – угол, заключённый

между этими сторонами;

3) (формула Герона) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a , b , c – стороны треугольника, $p = \frac{a+b+c}{2}$ – его полупериметр.

При решении некоторых задач использовались и другие формулы для площади треугольника, но соответствующие теоремы не формулировались и не доказывались. Мы сделаем это в данном параграфе. Кроме того, мы дадим новое доказательство формулы Герона, отличающееся от приведённого в параграфе 11.4 учебника геометрии для 7–9-го классов.

Начнём с последнего.

1. Воспользуемся второй из выписанных выше формул для площади треугольника: $S = \frac{1}{2}bcsin A$.

2. Записав теорему косинусов $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, найдём из неё $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

3. Зная $\cos A$, найдём $\sin A$:

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2} = \frac{\sqrt{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}}{2bc}.$$

4. Подставляя полученное выражение для $\sin A$ в формулу площади, получим:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{4}\sqrt{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)} = \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{\left((b+c)^2 - a^2\right)\left(a^2 - (b-c)^2\right)} = \frac{1}{4}\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)} = \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)} = \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned}$$

(на предпоследнем шаге мы воспользовались равенством $a+b+c=2p$). ■

Заметим, что находить площадь треугольника по трём известным сторонам с использованием формулы Герона далеко не всегда целесообразно. Если длины сторон выражаются целыми числами, скажем, 5; 7 и 8, то формула Герона даёт ответ почти мгновенно. Если же длины сторон, скажем, $3\sqrt{2}$; 4 и $\sqrt{13}$, то формула Герона приводит к значительным вычислительным трудностям (очень полезно один раз проделать соответствующие вычисления).

Здесь проще поступить так: 1) по теореме косинусов найти косинус одного из углов треугольника; 2) зная косинус угла, найти его синус; 3) найти площадь по формуле с синусом (формула 2 из перечисленных в начале параграфа).

В рассмотренном примере найдём, например, косинус угла, лежащего напротив стороны длиной $\sqrt{13}$ (обозначив его α):

$$(\sqrt{13})^2 = (3\sqrt{2})^2 + 4^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \cos \alpha, \text{ откуда } \cos \alpha = \frac{7}{8\sqrt{2}}.$$

Теперь находим $\sin \alpha = \frac{\sqrt{79}}{8\sqrt{2}}$, а значит, площадь треугольника равна

$$\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{79}}{8\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{79}}{4}.$$

Далее мы получим две формулы для вычисления площади треугольника, в одну из которых входит радиус описанной окружности, а в другую – вписанной.

Теорема 63. Площадь треугольника равна произведению всех его сторон, делённому на учетверённый радиус описанной окружности:

$$S = \frac{abc}{4R},$$

где a, b, c – стороны треугольника, R – радиус описанной около него окружности.

Доказательство

1. Воспользуемся формулой площади треугольника по двум сторонам и углу между ними: $S = \frac{1}{2}bc\sin A$.

2. Мы знаем, что по теореме синусов $2R = \frac{a}{\sin A}$.

3. Выразим отсюда $\sin A = \frac{a}{2R}$ и подставим в формулу для площади:

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}.$$

Теорема доказана. ■

Теорема 64. Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности:

$$S = pr,$$

где a, b, c – стороны треугольника, $p = \frac{a+b+c}{2}$ – его полупериметр, r – радиус вписанной в него окружности.

Доказательство

1. Треугольник ABC со сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. } (дано)
(рис. Д. 4а)

2. Окружность радиуса r , вписанная в $\triangle ABC$.

3. $S = pr$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ – полупериметр $\triangle ABC$ (требуется доказать).

4. Пусть O – центр вписанной окружности, а M, N, K – точки её касания со сторонами BC, AC, AB соответственно (рис. Д. 4а).

5. Проведём отрезки OA, OB, OC, OM, ON, OK (построение) (рис. Д. 4б).

6. Отрезки OM, ON, OK перпендикулярны сторонам BC, AC, AB соответственно как радиусы, проведённые в точки касания.

7 (3). Найдём площадь треугольника ABC как сумму площадей треугольников BOC, AOC и AOB :

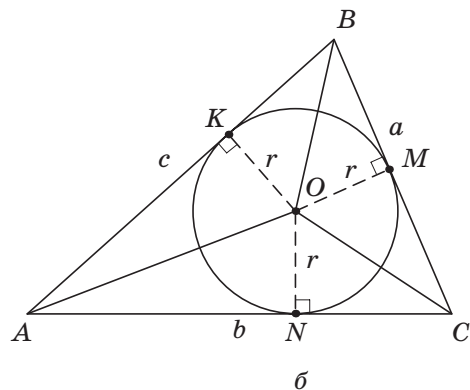
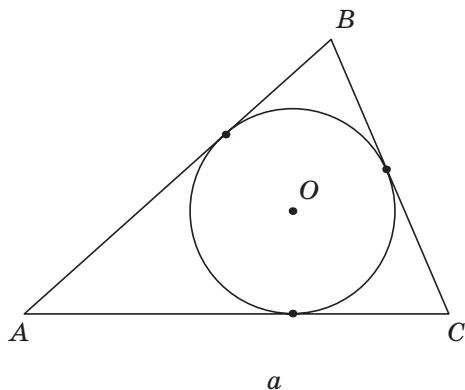


Рис. Д.4

$$S = S_{BOC} + S_{AOC} + S_{AOB} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}r(a + b + c) = r \cdot \frac{a + b + c}{2} = rp.$$

Теорема доказана. ■

Рассмотрим теперь очень важное понятие **внеписанных окружностей** треугольника.

1. Возьмём произвольный треугольник ABC и проведём биссектрисы его внутренних и внешних углов (построение) (рис. Д. 5а).

2. Точно так же, как в курсе геометрии 7–9-го классов доказывалось, что три биссектрисы внутренних углов пересекаются в одной точке O , равноудалённой от сторон треугольника, можно доказать, что биссектриса внутреннего угла при любой вершине и биссектрисы внешних углов при двух других вершинах пересекается в одной точке. Если это была биссектриса внутреннего угла при вершине A , то обозначим соответствующую точку пересечения O_a .

3. Таким образом мы получим четыре точки O, O_a, O_b, O_c (рис. Д. 5 а).

4. Эти точки являются центрами четырёх окружностей, касающихся трёх прямых BC, AC и AB .

5. Та из этих четырёх точек, которая лежит внутри треугольника, т.е. точка O , является центром вписанной окружности. Эта окружность касается сторон треугольника ABC .

6. Каждая из трёх остальных окружностей касается одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон. Эти окружности имеют специальные названия.

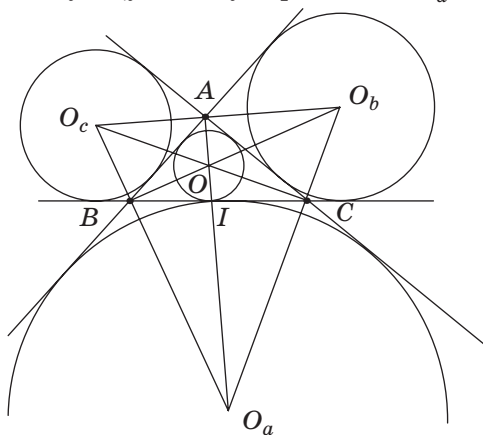


Рис. Д. 5

Определение 64. Вневписанной окружностью треугольника называется окружность, которая касается одной из его сторон и продолжения двух других сторон.

Таким образом, точки O_a , O_b , O_c являются центрами вневписанных окружностей. Радиусы соответствующих вневписанных окружностей принято обозначать r_a , r_b , r_c .

Выведем формулу для нахождения площади треугольника через радиус его вневписанной окружности – аналогично доказанной в теореме 65 формуле для нахождения площади треугольника через радиус его вписанной окружности.

Теорема 65. Площадь треугольника равна произведению разности его полупериметра и стороны на радиус вневписанной окружности, касающейся этой стороны:

$$S = (p - a)r_a,$$

где a , b , c – стороны треугольника, $p = \frac{a+b+c}{2}$ – его полупериметр, r_a – радиус вневписанной окружности, касающейся стороны a .

Доказательство

1. Треугольник ABC со сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.
2. Вневписанная окружности радиуса r_a , касающаяся стороны a .
3. $S = (p - a)r_a$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ – полупериметр $\triangle ABC$ (требуется доказать).
4. Пусть O_a – центр вневписанной окружности, касающейся стороны a , т.е. BC , а M , N , K – точки её касания со стороной BC и продолжениями сторон AC , AB соответственно (рис. Д. 6а).

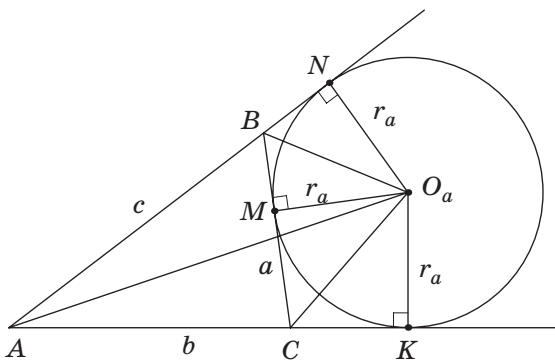


Рис. Д. 6

5. Проведём отрезки O_aA , O_aB , O_aC , O_aM , O_aN , O_aK (построение) (рис. Д. 6б).
6. Отрезки O_aM , O_aN , O_aK перпендикулярны прямым BC , AC , AB соответственно как радиусы, проведённые в точки касания.

- 7 (3). Площадь четырёхугольника ABO_aC можно найти двумя способами – как сумму площа-

дей треугольников ABC и BO_aC , или же как сумму площадей треугольников AO_aC и AO_aB . Отсюда заключаем (напомним, что площадь треугольника ABC мы обозначили через S), что $S + S_{BO_aC} = S_{AO_aC} + S_{AO_aB}$, откуда:

$$\begin{aligned} S &= S_{AO_aC} + S_{AO_aB} - S_{BO_aC} = \frac{1}{2}br_a + \frac{1}{2}cr_a - \frac{1}{2}ar_a = \frac{1}{2}r_a(b+c-a) = \\ &= \frac{1}{2}r_a(a+b+c-2a) = r_a \cdot \frac{2p-2a}{2} = r_a(p-a). \end{aligned}$$

Теорема доказана. ■

Заметим, что теорема 65 даёт нам основной способ нахождения радиуса вневписанной окружности. Вневписанные окружности обладают многими интересными свойствами, с некоторыми из которых вы сможете познакомиться, решая задачи к данному параграфу.

§ Д.3



РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

В учебнике геометрии для 7–9-го классов было сказано, что решением треугольников называется вычисление его неизвестных элементов по известным элементам, но решались в основном задачи нахождения сторон и/или углов треугольника по известным другим сторонам и/или углам. В данном параграфе мы будем заниматься вычислением длин медиан, биссектрис, высот, радиусов вписанной и описанной окружностей по известным сторонам и/или углам треугольника.

Начнём с простой, но важной теоремы, относящейся не к треугольнику, а к параллелограмму.

Теорема 66. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Доказательство

1. Параллелограмм $ABCD$.

2. AB, BC, CD, AD – стороны параллелограмма $ABCD$.

3. AC, BD – диагонали параллелограмма $ABCD$.

4. $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$ (требуется доказать).

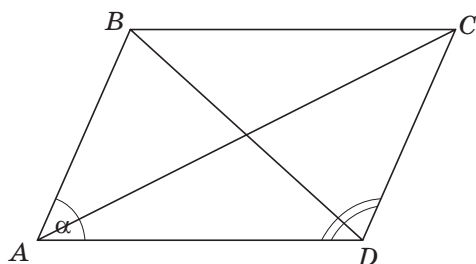


Рис. Д. 7

5. Заметим, что если обозначить длины сторон $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, а длины диагоналей $AC = d_1$, $BD = d_2$, то доказываемое утверждение можно переписать в виде: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$.

6. Обозначим $\angle BAD = \alpha$, тогда $\angle ADC = 180^\circ - \alpha$ и $\cos \angle ADC = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.

7. Запишем теорему косинусов для треугольника BAD :

$d_2^2 = BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos \angle BAD = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$ (5, 6, теорема косинусов).

8. Запишем теорему косинусов для треугольника ADC :

$d_1^2 = AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2 \cdot CD \cdot AD \cdot \cos \angle ADC = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$ (5, 6, теорема косинусов).

9 (5). Сложив равенства, из п. п. 7 и 8, получим: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$ (7, 8). ■

С помощью теоремы 66 легко находится длина медианы треугольника, если известны три его стороны.

ЗАДАЧА

В треугольнике ABC со сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ найти длину m_a медианы, проведённой из вершины A .

Решение

1. Треугольник ABC .

2. AM – медиана, проведённая к стороне BC .

3. AM (требуется найти).

4. Продолжим медиану AM за сторону BC и отложим на продолжении отрезок MK , равный AM , после чего соединим точку K с точками B и C (построение) (рис. Д. 86).

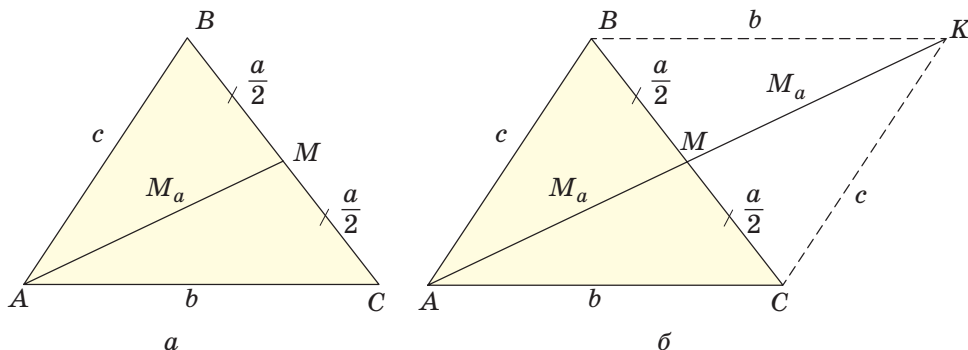


Рис. Д. 8

5. Диагонали четырёхугольника $ABKC$ пересекаются в точке M и делятся этой точкой пополам, следовательно, четырёхугольник $ABKC$ является параллелограммом (2, 4).

6. Стороны параллелограмма $ABKC$ имеют длины $AC = BK = b$, $AB = CK = c$, длина диагонали AK равна $2m_a$, а диагонали $BC = a$.

7(3). Применяя теорему 66, получаем равенство $(2m_a)^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2$,

откуда находится длина медианы: $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ ■

Использованный при решении разобранной задачи приём называется «удвоение медианы» и полезен при решении многих других задач.

Заметим также, что на рис. Д. 8б площадь треугольника ABC равна площади каждого из треугольников ABK и ACK , и бывает так, что площади этих треугольников найти значительно проще, чем треугольника ABC .

Теперь докажем две теоремы, позволяющие находить длину биссектрисы треугольника.

Теорема 67. Длина биссектрисы треугольника может быть вычислена по формуле:

$$l_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c},$$

где l_a – длина биссектрисы, проведённой к стороне длиной a из вершины A ; b , c – длины сторон треугольника, между которыми проходит биссектриса, A – угол между этими сторонами.

Доказательство

- | | | |
|--|---|---------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Треугольник ABC. 2. AD – биссектриса $\angle BAC$. 3. $AC = b$, $AB = c$, $AD = l_a$. | } | (дано) (рис. Д. 9а) |
|--|---|---------------------|

$$4. l_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c} \text{ (требуется доказать).}$$

5. Обозначим половину угла A треугольника ABC через α (рис. Д. 9б) и запишем выражения для его площади через формулу с синусом:
 $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \sin 2\alpha$.

6. Теперь запишем выражения для площади треугольника ABC как сумму площадей треугольников ACD и ABD :

$$S_{ABC} = S_{ACD} + S_{ABD} = \frac{1}{2}bl_a \sin \alpha + \frac{1}{2}cl_a \sin \alpha = \frac{1}{2}l_a \sin \alpha \cdot (b+c).$$

7. Приравняв друг другу записанные выражения, получим:

$$\frac{1}{2}l_a \sin \alpha \cdot (b+c) = \frac{1}{2}bc \sin 2\alpha \quad (5, 6).$$

8. Умножая обе части записанного равенства на 2 и учитывая формулу синуса двойного угла $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$, получим:

$$l_a \sin \alpha \cdot (b+c) = bc \cdot 2\sin \alpha \cos \alpha.$$

9(4). Наконец, деля обе части записанного равенства на $(b+c) \sin \alpha$, приходим к равенству $l_a = \frac{2bc \cos \alpha}{b+c}$, или же, с учётом того, что $\alpha = \frac{A}{2}$, к требуемо-

му $l_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}$. ■

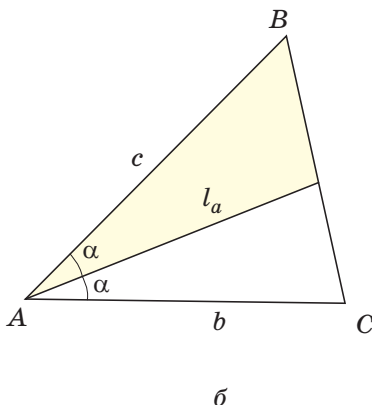
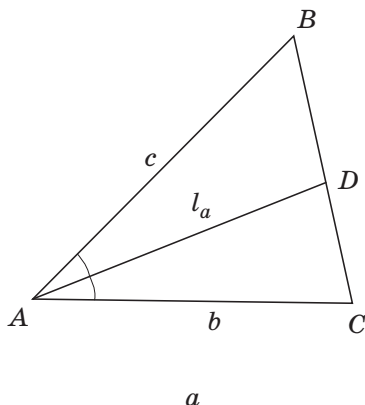


Рис. Д. 9

Теорема 68. Для длины биссектрисы треугольника выполняется соотношение:

$$l_a^2 = bc - mn ,$$

где l_a – длина биссектрисы, проведённой к стороне длиной a из вершины A ; b, c – длины сторон, между которыми проходит биссектриса, m, n – длины отрезков, на которые биссектриса делит сторону, к которой проведена.

Доказательство

1. Треугольник ABC .

2. AD – биссектриса $\triangle BAC$.

3. $AC = b, AB = c, CD = m, BD = n, AD = l_a$.

4. $l_a^2 = bc - mn$ (требуется доказать).

5. Обозначим $\angle ADB = \varphi$, тогда для смежного угла ADC будем иметь: $\angle ADC = 180^\circ - \alpha$.

6. Запишем теорему косинусов для треугольника ADB :

$$c^2 = l_a^2 + n^2 - 2l_a n \cos \varphi .$$

7. Запишем теорему косинусов для треугольника ADC , учитывая, что $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi$:

$$b^2 = l_a^2 + m^2 + 2l_a m \cos \varphi .$$

8. Умножив первое равенство на m , а второе – на n и сложив, получим:

$$c^2 m + b^2 n = l_a^2 m + l_a^2 n + m^2 n + n^2 m \quad (6, 7).$$

9. Правая часть записанного равенства несложно раскладывается на множители группировкой:

$$l_a^2 m + l_a^2 n + m^2 n + n^2 m = l_a^2 (m + n) + mn(m + n) = (m + n)(l_a^2 + mn).$$

10. Полученное выражение навеивает вопрос: «Не раскладывается ли и левая часть на множители, одним из которых является $(m+n)$?».

11. По теореме 59 $\frac{b}{c} = \frac{m}{n}$, откуда $bn = cm$.

12. С учётом записанного соотношения преобразуем левую часть равенства из п. 9: $c^2 m + b^2 n = c \cdot cm + b \cdot bn = c \cdot bn + b \cdot cm = bc(m + n)$.

13. С учётом полученных в п. 9 и п. 12 разложений, запишем равенство $bc(m + n) = (m + n)(l_a^2 + mn)$ и разделим обе его части на $(m + n)$.

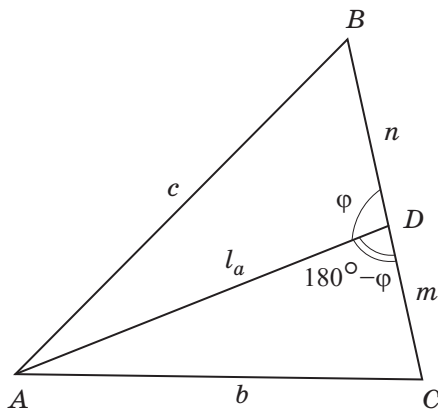


Рис. Д. 10

14(4). В результате получим $bc = l_a^2 + mn$, или $l_a^2 = bc - mn$, что и требовалось. ■

В заключение данного параграфа рассмотрим нахождение высоты треугольника по трём известным его сторонам.

Во многих ситуациях это удобно делать через площадь треугольника.

ЗАДАЧА 1

В прямоугольном треугольнике с катетами a и b найдите длину h высоты, проведённой к гипотенузе.

Решение

1. Пусть длина гипотенузы равна c . По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$.

2. Поскольку площадь треугольника может быть вычислена и по формуле

$S = \frac{1}{2}ch$, и по формуле $S = \frac{1}{2}ab$, то можно записать, что $ch = ab$, откуда $h = \frac{ab}{c}$, или $h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. ■

ЗАДАЧА 2

В треугольнике ABC со сторонами $BC = 5$, $AC = 7$, $AB = 8$ найдите длину h_a высоты, проведённой из вершины A .

Решение

1. Сначала найдём площадь треугольника по формуле Герона. Поскольку $p = \frac{1}{2} \cdot (5 + 7 + 8) = 10$, имеем: $S = \sqrt{10 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} = 10\sqrt{3}$.

2. Но также $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2} \cdot 5h_a$.

3. Приравнявая два выражения для площади, получаем $\frac{5}{2}h_a = 10\sqrt{3}$, откуда находим $h_a = 4\sqrt{3}$. ■

Но не всегда при нахождении высоты нужно использовать площадь. Бывают ситуации, вроде рассмотренного на стр. 261 примера, когда быстрее действовать по-другому.

ЗАДАЧА 3

В треугольнике ABC со сторонами $BC = \sqrt{15}$, $AC = 5$, $AB = 2\sqrt{6}$ найдите длину h_a высоты, проведённой из вершины A .

Решение

1. Возьмём меньший из прилежащих к стороне BC углов. В нашем случае это угол B . Он обязательно острый.

2. Проведём условно высоту AH (построение) (рис. Д. 11а, б, в), не занимаясь выяснением вопроса, острый, прямой или тупой угол C .

3. В любом из возможных случаев мы получим прямоугольный треугольник BAH с острым углом B , у которого сторона AB – гипотенуза, а искомая высота h_a – катет, а значит, $h_a = AB \cdot \sin B$.

4. Осталось найти $\sin B$. Сначала по теореме косинусов найдём $\cos B$:

$$5^2 = (2\sqrt{6})^2 + (\sqrt{15})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{15} \cdot \cos B, \text{ откуда } \cos B = \frac{7}{6\sqrt{10}}.$$

5. Теперь имеем: $\sin^2 B = 1 - \frac{7}{360} = \frac{311}{360}$, откуда $\sin B = \frac{\sqrt{311}}{6\sqrt{10}}$.

6. Окончательно получаем: $h_a = AB \cdot \sin B = 2\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{311}}{6\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{311}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{4665}}{15}$. ■

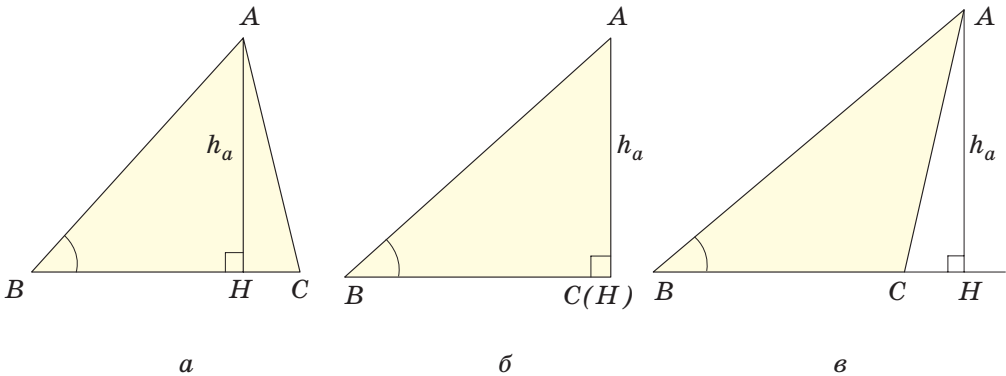


Рис. Д. 11



НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРИИ ОКРУЖНОСТИ

Д.4.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ УГЛОВ, СВЯЗАННЫХ С ОКРУЖНОСТЬЮ

В учебнике геометрии для 7–9-го классов подробно рассматривались два вида углов, связанных с окружностью – *центральные* и *вписанные*.

Напомним, что *центральным* углом называется угол с вершиной в центре окружности (рис. Д. 12а). Угловой величиной дуги, лежащей внутри центрального угла, называется величина этого центрального угла. Это может быть записано в виде $\angle AOB = \cup AB$.

Вписанным углом называется угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны пересекают её (рис. Д. 12б). Было доказано, что величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, лежащей внутри этого угла. Это соотношение обычно записывается в виде:

$$\angle MNK = \frac{1}{2} \cup MK.$$

И для центрального, и для вписанного углов очень часто вместо «дуга лежит внутри угла» говорят также «угол опирается на дугу», особенно, если стороны углов изображены отрезками, не выходящими за пределы круга: радиусами для центрального угла (рис. Д. 12в) или хордами для вписанного (рис. Д. 12г).

В учебнике геометрии для 7–9-го классов упоминались и другие углы, но теоремы о нахождении их величин не доказывались. Здесь мы рассмотрим ещё три типа углов, связанных с окружностью, и выведем формулы для вычисления величин таких углов.

Теорема 69. Величина угла с вершиной внутри окружности равна полусумме угловых величин дуг, лежащих внутри данного угла и угла, с ним вертикального.

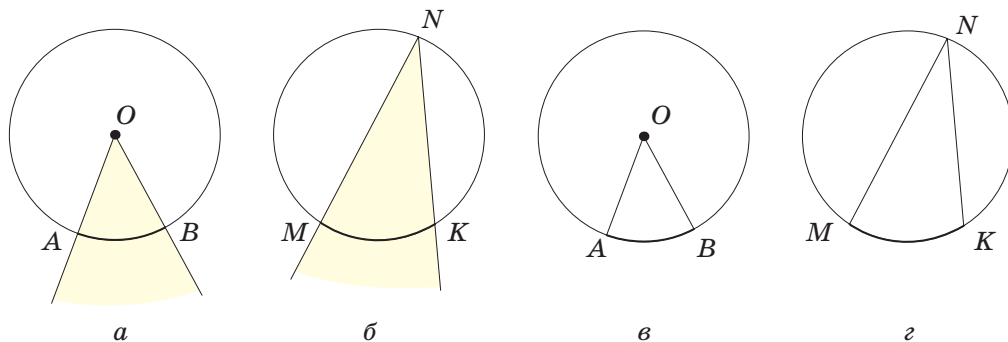


Рис. Д. 12

Доказательство

1. Угол AMB с вершиной M , лежащей внутри окружности (точки A и B лежат на окружности) (дано) (рис. Д. 13а).

2. Продолжим отрезки AM и BM за точку M до пересечения с окружностью в точках A_1 и B_1 соответственно (построение) (рис. Д. 13б). Получился угол A_1MB_1 , вертикальный углу AMB .

3. $\angle AMB = \frac{1}{2}(\cup AB + \cup A_1B_1)$ (требуется доказать).

4. Соединим точки A и B_1 хордой AB_1 (построение) (рис. Д. 13б).

5. Угол AB_1B – вписанный, а значит, его величина равна половине угловой величины дуги AB , т.е. $\angle AB_1B = \frac{1}{2} \cup AB$. Аналогично, угол A_1AB_1 – тоже вписанный, и поэтому $\angle A_1AB_1 = \frac{1}{2} \cup A_1B_1$ (свойства вписанных углов).

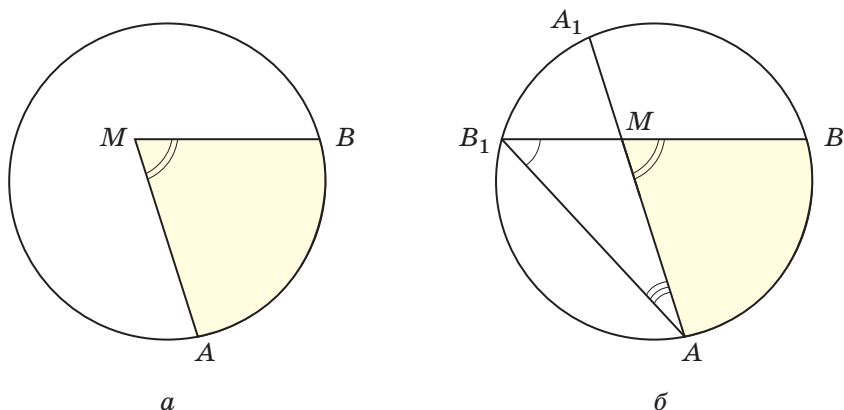


Рис. Д. 13

6(3). Интересующий нас угол AMB – внешний угол треугольника AMB_1 , и поэтому он равен сумме внутренних не смежных с ним углов AB_1B и A_1AB_1 , т.е. $\angle AMB = \angle AB_1B + \angle A_1AB_1 = \frac{1}{2} \cup AB + \frac{1}{2} \cup A_1B_1 = \frac{1}{2} (\cup AB + \cup A_1B_1)$, что и требовалось доказать. ■

Теорема 70. Величина угла с вершиной вне окружности и сторонами, пересекающими окружность, равна полуразности угловых величин дуг, лежащих внутри этого угла.

Доказательство

1. Угол с вершиной M , лежащей вне окружности, при этом одна сторона угла M пересекает окружность в точках A и A_1 , а другая – в точках B и B_1 (дано) (рис. Д. 14а).

2. $\angle M = \frac{1}{2} (\cup A_1B_1 - \cup AB)$ (требуется доказать).

3. Соединим точки A и B_1 хордой AB_1 (построение) (рис. Д. 14б).

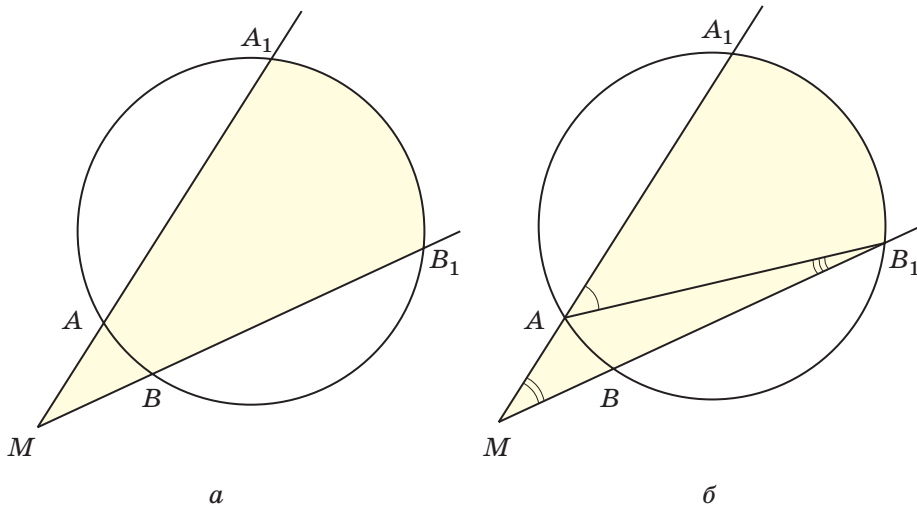


Рис. Д. 14

4. Угол AB_1B – вписанный, а значит, его величина равна половине угловой величины дуги AB , т.е. $\angle AB_1B = \frac{1}{2} \cup AB$. Аналогично, угол A_1AB_1 – тоже вписанный, и поэтому $\angle A_1AB_1 = \frac{1}{2} \cup A_1B_1$ (свойства вписанных углов).

5. Угол A_1AB_1 – внешний угол треугольника AMB_1 , и поэтому он равен сумме внутренних не смежных с ним углов AB_1B и M , т.е. $\angle A_1AB_1 = \angle AB_1B + \angle M$.

6(2). Из предыдущего равенства получаем:

$$\angle M = \angle A_1AB_1 - \angle AB_1B = \frac{1}{2} \cup A_1B_1 - \frac{1}{2} \cup AB = \frac{1}{2} (\cup A_1B_1 - \cup AB),$$

что и требовалось доказать. ■

Замечание 1. Часто доказанную теорему формулируют так: Угол, образованный двумя секущими, проведёнными к окружности из общей внешней точки, измеряется полуразностью угловых величин дуг, лежащих внутри него.

Замечание 2. Теорема остается справедливой и в том случае, когда одна или обе секущие превращаются в касательные (рис. Д. 15).

Теорема 71. Величина угла между касательной и хордой, проходящей через точку касания, равна половине угловой величины дуги, лежащей внутри этого угла.

Доказательство

1. Прямая AB , касающаяся окружности в точке M .
 2. Хорда MK . } (дано) (рис. Д. 16а).

3. $\angle AMK = \frac{1}{2} \cup MK$, где дуга MK лежит внутри угла AMK (требуется доказать).

4(3). Если хорда MK – диаметр окружности (рис. Д. 16б), то $\angle AMK = 90^\circ$, а $\cup MK$, и соотношение $\angle AMK = \frac{1}{2} \cup MK$ выполняется.

5. Если угол AMK – острый, то проведём диаметр MN и соединим точки N и K хордой NK (построение) (рис. Д. 16в).

6. Поскольку $\angle AMK = 90^\circ$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр, из прямоугольного треугольника NMK заключаем, что $\angle MNK = 90^\circ - \angle KMN$.

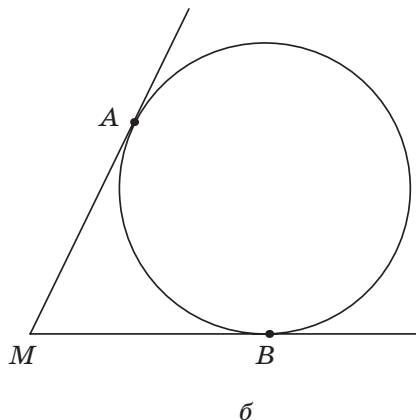
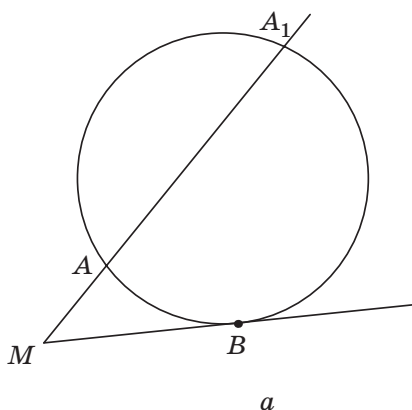


Рис. Д. 15

7. Но углы AMK и KMN в сумме дают прямой угол AMN , поэтому $\angle AMK = 90^\circ - \angle KMN$.

8. Отсюда заключаем, что $\angle MNK = \angle AMK$ (6, 7).

9(3). Но поскольку угол MNK – вписанный, то $\angle MNK = \frac{1}{2} \cup MK$, а значит, и $\angle AMK = \frac{1}{2} \cup MK$, и для этого случая доказываемое соотношение тоже установлено.

10. Наконец, если угол AMK – тупой (рис. Д. 16г), то смежный с ним угол BMK – острый, и для него по доказанному выше имеем: $\angle BMK = \frac{1}{2} \cup MYK$.

11(3). Теперь, учитывая, что $\cup MYK + \cup MXK = 360^\circ$, получаем: $\angle AMK = 180^\circ - \angle BMK = 180^\circ - \frac{1}{2} \cup MYK = \frac{1}{2} (360^\circ - \cup MYK) = \frac{1}{2} \cup MYK$, и доказываемое соотношение установлено также и для этого последнего случая.

12. Теорема полностью доказана (4, 9, 11). ■

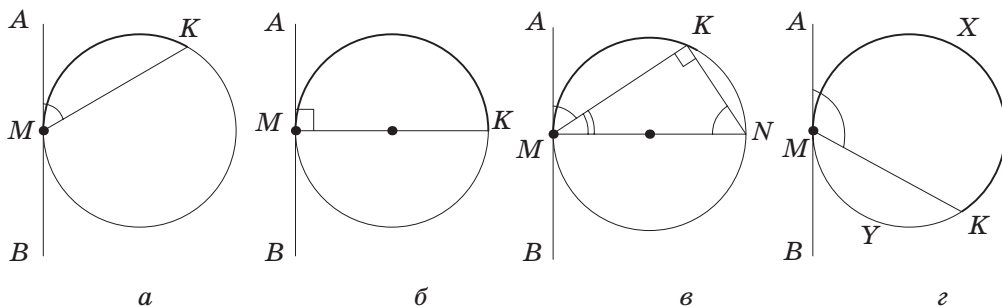


Рис. Д. 16

Д.4.2. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ В КРУГЕ

Докажем три теоремы, которые традиционно называются теоремами о пропорциональных отрезках в круге.

Теорема 72. Произведения отрезков каждой из двух пересекающихся хорд окружности равны.

Доказательство

- | | | |
|---|---|----------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Окружность. 2. AB, CD – хорды окружности. 3. K – точка пересечения хорд AB и CD. | } | (дано) (рис. Д. 17а) |
|---|---|----------------------|

4. $KA \cdot KB = KC \cdot KD$ (требуется доказать).

5. Проведём отрезки AC и BD (построение) (рис. Д. 176).

6. Треугольники KAC и KDB подобны ($\angle AKC = \angle DKB$ как вертикальные, $\angle ACK = \angle DBK$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу).

7 (6). Из подобия треугольников KAC и KDB вытекает, что $\frac{KA}{KD} = \frac{KC}{KB}$

(6, свойство подобных треугольников), откуда следует, что $KA \cdot KB = KC \cdot KD$. ■

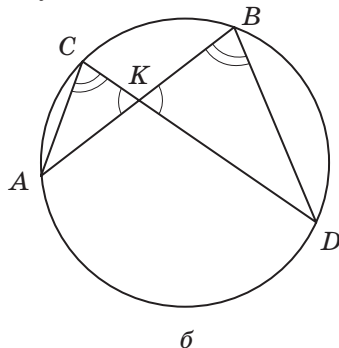
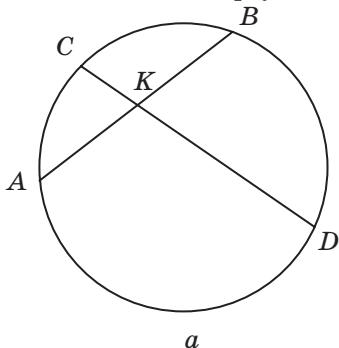


Рис. Д. 17

Теорема 73. Если из одной точки к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат касательной равен произведению отрезков секущей (все отрезки отмеряются от одной точки).

Доказательство

1. Окружность и точка K вне неё.

2. KM – касательная к окружности (M – точка касания).

3. KB – секущая (A и B точки пересечения с окружностью).

4. $KM^2 = KA \cdot KB$ (требуется доказать).

} (дано) (рис. Д. 18а)

Заметим, что точкой, от которой отмеряются все отрезки, может быть только точка K .

5. Проведём отрезки MA и MB (построение) (рис. Д. 186).

6. Треугольники KMA и KBM подобны, т.к. $\angle K$ у них общий, а оба угла KMA и KBM измеряются половиной величины дуги MA (не содержащей точку B) K – первый как угол между хордой и полукасательной, а второй как вписанный).

7 (6). Из подобия треугольников KMA и KBM вытекает, что $\frac{KM}{KB} = \frac{KA}{KM}$

(6, свойство подобных треугольников), откуда следует, что $KM^2 = KA \cdot KB$. ■

Заметим, что важно не только само установленное в теореме соотношение, но и факт подобия треугольников, из которого оно выводится.

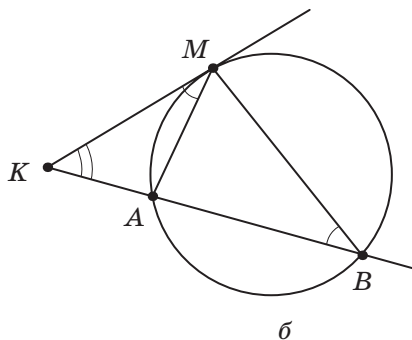
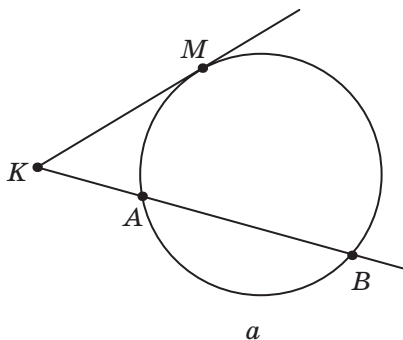


Рис. Д. 18

Задача

Касательная к описанной около треугольника ABC со сторонами $AB = 4$, $BC = 5$, $AC = 6$ окружности, проведённая в точке A , пересекает продолжение стороны BC в точке D . Найдите длину отрезка AD .

Решение

1. Треугольник ABC .
 2. ω – окружность, описанная около $\triangle ABC$.
 3. D – точка пересечения касательной к окружности ω в точке A с прямой BC .
 4. AD (требуется найти).
- } (дано) (рис. Д. 19)

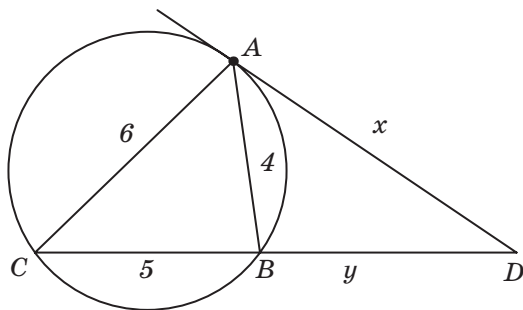


Рис. Д. 19

На чертеже возникла конфигурация из теоремы 74: из точки D к окружности проведены касательная DA и секущая DC . Если просто применить теорему 74, обозначив, например, $DA = x$, $DB = y$, то получим уравнение с двумя неизвестными: $x^2 = y(y + 5)$. В принципе второе уравнение можно было бы получить, найдя $\cos C$ из $\triangle ABC$, а затем записав теорему косинусов для $\triangle ACD$, но такое решение получается весьма громоздким.

Гораздо проще воспользоваться подобием треугольников DAB и DCA .

5. Треугольники DAB и DCA подобны по причинам, установленным при доказательстве теоремы. Отсюда заключаем, что $\frac{DA}{DC} = \frac{DB}{DA} = \frac{AB}{AC}$, или $\frac{x}{y+5} = \frac{y}{x} = \frac{4}{6}$. Это приводит к двум линейным уравнениям: $2x = 3y$ и $2y + 10 = 3x$, откуда легко находим, что $x = 6$. ■

Теорема 74. Произведения отрезков каждой из двух секущих, проведённых к окружности из одной точки, равны (все отрезки отмеряются от одной точки).

Доказательство

1. Окружность и точка K вне неё.
 2. KB – секущая (A и B точки пересечения с окружностью).
 3. KD – секущая (C и D точки пересечения с окружностью).
 4. $KA \cdot KB = KC \cdot KD$ (требуется доказать).
- } (дано
рис. Д. 20а)

Заметим, что точкой, от которой отмеряются все отрезки, может быть только точка K .

5. Проведём из точки K касательную KM к окружности (M – точка касания) (построение) (рис. Д. 20б).

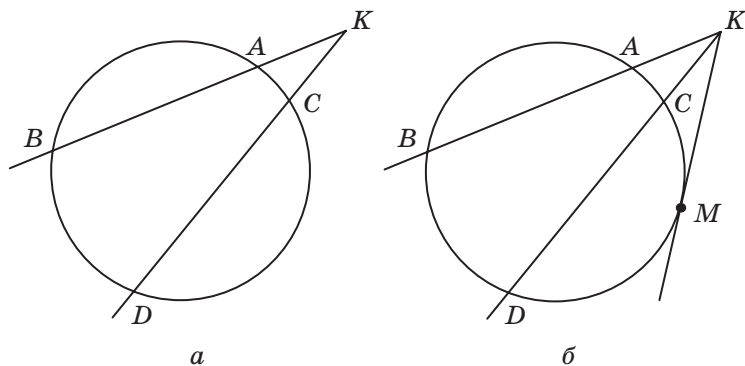


Рис. Д. 20

6 (4). По теореме $KM^2 = KA \cdot KB$ и $KM^2 = KC \cdot KD$, откуда и заключаем, что $KA \cdot KB = KC \cdot KD$. ■

Заметим, что доказанную теорему 74 можно трактовать как обобщение теоремы 72. Действительно, в условии теоремы 72 речь идёт о хордах AB и CD , пересекающихся в точке K . Условие теоремы 74 можно трактовать так, что даны две не пересекающиеся хорды AB и CD , но их продолжения пересекаются в точке K . И в том и в другом случае для отрезков KA , KB , KC и KD выполняется одно и то же соотношение $KA \cdot KB = KC \cdot KD$.

Д.4.3. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГООУГОЛЬНИКИ. СВОЙСТВА И ПРИЗНАКИ ВПИСАННЫХ И ОПИСАННЫХ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКОВ

В учебнике геометрии для 7–9-го классов были даны определения вписанных и описанных многоугольников, применимые и к четырёхугольникам. Напомним их.

Четырёхугольник называется *вписанным* в окружность (а окружность называется описанной около четырёхугольника), если все вершины четырёхугольника лежат на окружности.

Четырёхугольник называется *описанным* около окружности (а окружность называется вписанной в четырёхугольник), если все стороны четырёхугольника касаются окружности.

Ответим на такие вопросы:



Всякий ли четырёхугольник можно вписать в окружность? При каких условиях можно четырёхугольник вписать в окружность?

Из опыта мы знаем, что есть четырёхугольники, которые можно вписать в окружность. Например, квадрат всегда можно вписать в окружность (рис. Д. 21). А вот ромб, не являющийся квадратом, вписать в окружность нельзя (рис. Д. 22). Эти выводы опираются лишь на наши наблюдения.

Сформулируем и докажем свойства вписанных в окружность четырёхугольников.

1. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность (дано) (рис. 18.14).

Вспомним понятие вписанного угла и правила нахождения его величины.

$$2. \angle A = \frac{1}{2} \cup BCD, \angle C = \frac{1}{2} \cup DAB \text{ (1, Т. 74).}$$

3. Найдём сумму углов A и C :

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} \cup BCD + \frac{1}{2} \cup DAB = \frac{1}{2} (\cup BCD + \cup DAB) \text{ (1, 2, свойства измерения дуг окружности).}$$

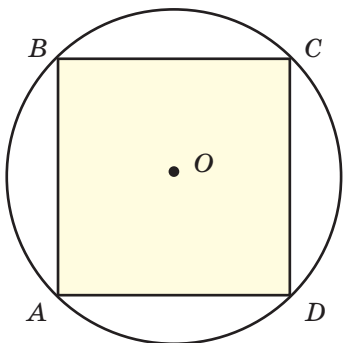


Рис. Д. 21

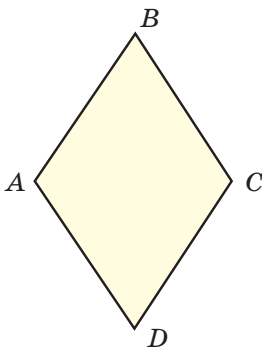


Рис. Д. 22

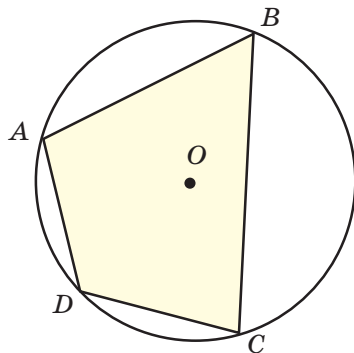


Рис. Д. 23

4. Объединение дуг BCD и DAB есть окружность, т.е.

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ \text{ (1, определение дуг окружности).}$$

5. Сумма величин углов A и C равна угловой величине полуокружности (4, свойства измерения вписанных углов).

Таким образом, мы доказали следующее свойство:

Теорема 75 (свойство вписанного четырёхугольника). Сумма противоположных углов вписанного в окружность четырёхугольника равна 180° .

Оказывается, что верно и обратное утверждение.

Теорема 76 (признак вписанного четырёхугольника). Если сумма двух противоположных углов четырёхугольника равна 180° , то около этого четырёхугольника можно описать окружность.

Доказательство

1. Нам дан четырёхугольник $ABCD$, у которого сумма углов B и D равна 180° : $\angle B + \angle D = 180^\circ$ (дано) (рис. 18.15а).

2. Около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность (требуется доказать).

Есть такая окружность или нет, мы пока не знаем, но всегда можно провести окружность через любые три точки, являющиеся вершинами треугольника.

3. Проведём через вершины A , B и C четырёхугольника $ABCD$ окружность (построение) (рис. 18.15б) (1).

Для доказательства теоремы нужно доказать, что четвёртая вершина четырёхугольника (точка D) лежит на этой окружности, т.е. не может лежать внутри этой окружности или вне её.

4. Предположим, что точка D лежит внутри окружности (предположение) (рис. 18.15б).

5. Продолжим сторону AD до пересечения с окружностью в точке K и соединим точку K с точкой C (построение) (рис. 18.15в).

6. Получим четырёхугольник $ABCK$, вписанный в окружность (5, определение вписанного четырёхугольника).

7. $\angle B + \angle ADC = 180^\circ$ (1), $\angle B + \angle K = 180^\circ$ (6, Т. 75).

8. $\angle ADC = \angle K$ (7).

9. $\angle ADC$ — внешний угол $\triangle CDK$ (4, 6, определение внешнего угла).

Выполнение п. 8 и п. 9 вместе невозможно, так как внешний угол треугольника KDC не может быть равен его внутреннему не смежному с ним углу. Значит, предположение п. 4 неверно: точка D не может лежать внутри построенной окружности.

Аналогично доказывается, что вершина D не может лежать вне этой окружности (рис. 18.15г).

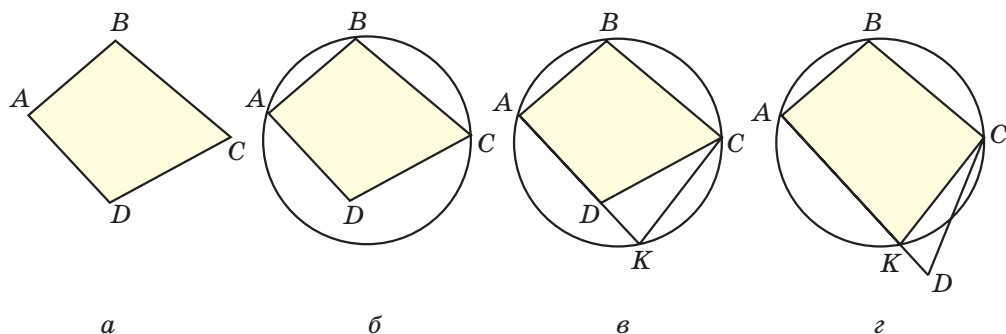


Рис. Д. 24

10(2). Итак, вершина D не может лежать ни внутри окружности, ни вне её. Следовательно, точка D должна лежать только на этой окружности и D совпадает с K . ■

Рассмотрим *четырёхугольник, описанный около окружности*.



Во всякий ли четырёхугольник можно вписать окружность?

Верно, например, что во всякий квадрат можно вписать окружность (рис. Д. 25), а в «длинную» равнобедренную трапецию (рис. Д. 26) вписать окружность не удастся.

Теорема 77 (свойство описанного четырёхугольника). Суммы противоположных сторон описанного около окружности четырёхугольника равны.

Доказательство

1. $ABCD$ — четырёхугольник, описанный около окружности с центром в точке O (дан) (рис. Д. 27).

2. $AB + CD = AD + BC$ (требуется доказать).

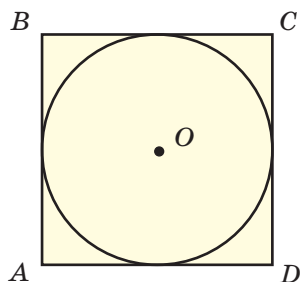


Рис. Д. 25

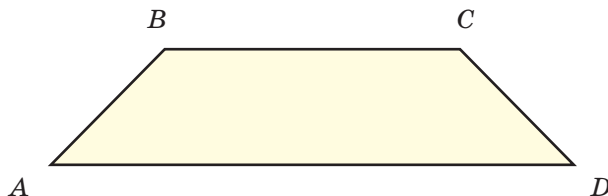


Рис. Д. 26

3. Стороны четырёхугольника $ABCD$ касаются окружности соответственно в точках M, P, Q, N (1, определение описанного четырёхугольника) (рис. Д. 27).

4. $AM = AN, BM = BP, CQ = CP, DQ = DN$ (3, свойство касательных к окружности).

5(2). Сложив эти равенства почленно, получим: $AB + CD = AD + BC$. ■

Поскольку сумма $AB + CD + AD + BC$ представляет собой периметр четырёхугольника $ABCD$, то доказанную теорему можно сформулировать и так: «Сумма каждой пары противоположных сторон описанного четырёхугольника равна его полупериметру».

Оказывается, верно и утверждение, обратное теореме 77.

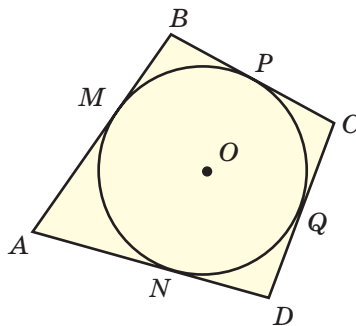


Рис. Д. 27

Теорема 78 (признак описанного четырёхугольника). Если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в этот четырёхугольник можно вписать окружность.

Доказательство

1. Нам дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, у которого $AB + CD = BC + AD$ (дано) (рис. Д. 28а).

2. В четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность (требуется доказать).

3. Проведём биссектрисы углов A и B (построение). Т.к. четырёхугольник $ABCD$ выпуклый, то сумма углов A и B меньше 360° , поэтому сумма их половин меньше 180° , а значит биссектрисы пересекутся в некоторой точке O (рис. Д. 28б).

5. Точка O является центром окружности, касающейся сторон AB, BC и AD четырёхугольника $ABCD$. (рис. Д. 28в).

6. Предположим, что утверждение теоремы неверно, и сторона CD не касается этой окружности (предположение). Это возможно в двух случаях: (а) сторона CD не пересекает окружность, (б) сторона CD пересекает окружность

7. В случае (а) проведём какую-нибудь касательную EF к окружности, не пересекающую отрезок CD так, чтобы точка E лежала на отрезке BC , а точка F — на отрезке AD (построение) (рис. Д. 28г).

8. Применяя теорему к описанному четырёхугольнику $ABEF$, получим: $AB + EF = BE + AF$.

9. Сравнивая последнее равенство с данным в условии равенством $AB + CD = BC + AD$, и учитывая, что $BC = BE + CE$ и $AD = AF + FD$, по-

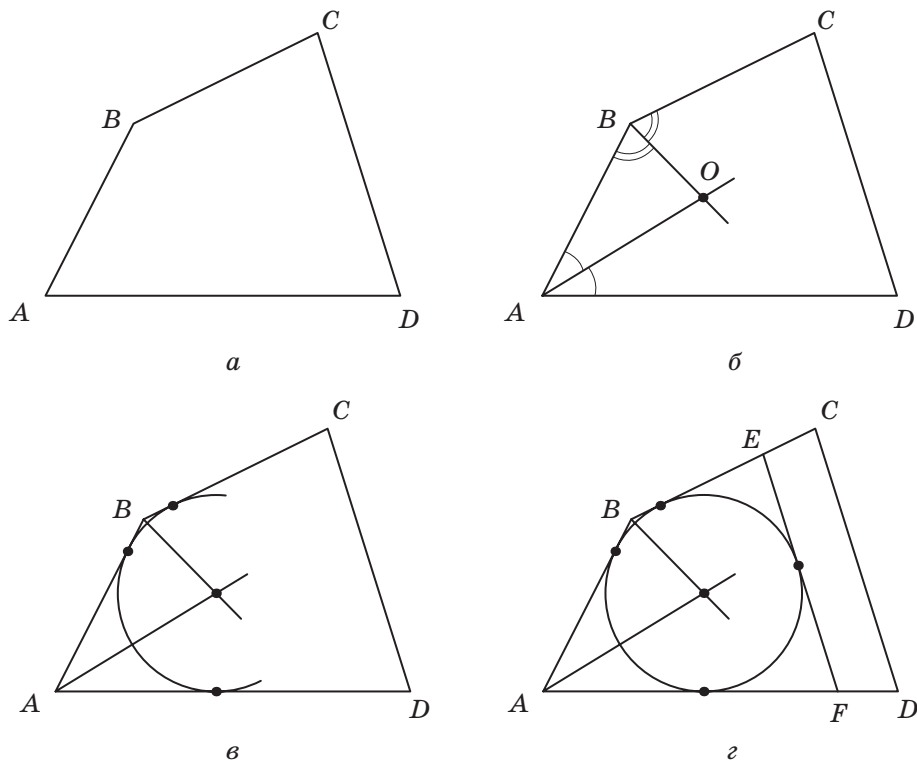


Рис. Д. 28

лучим: $EF = EC + CD + DF$, т.е. длина отрезка EF равна длине ломаной $ECDF$ (2, 7, 8).

10. Полученный в п. 10 результат противоречит аксиоме расстояния, значит, случай (а) из п. 6 невозможен (6, 9, аксиома 6).

11. Аналогично устанавливается, что случай (б) из п. 6 тоже невозможен (6, 9, аксиома 6).

12 (2). Остаётся признать, что сторона CD касается окружности, и четырёхугольник $ABCD$ – описанный (5, 10, 11). ■

Подумайте самостоятельно над вопросом:



Останется ли верным утверждение теоремы, если из её условия убрать требование выпуклости четырёхугольника?



ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

Начнём с того, что ещё раз сформулируем определение геометрического места точек.

Определение 65. *Геометрическим местом точек**, удовлетворяющих данному условию, называется геометрическая фигура, каждая точка которой удовлетворяет этому условию, и ни одна точка, не принадлежащая фигуре, не удовлетворяет этому условию**.

Можно сказать и по-другому: геометрическая фигура, состоящая из *всех* точек, удовлетворяющих данному условию.

Таким образом, чтобы установить, что данная фигура является гмт, удовлетворяющих данному условию, нужно доказать два утверждения:

- 1) если точка принадлежит фигуре, то она удовлетворяет условию;
- 2) если точка не принадлежит фигуре, то она не удовлетворяет условию.

Вместо утверждения 2) иногда проще доказывать равносильное ему утверждение:

- 2а) если точка удовлетворяет условию, то она принадлежит фигуре.

Вспомним основные гмт, встречавшиеся ранее в курсе геометрии 7–9-го классов.

(А) Геометрическое место точек, удалённых от данной точки на данное расстояние, есть окружность (с центром в этой точке и радиусом, равным этому расстоянию).

(Б) Геометрическое место точек, равноудалённых от концов данного отрезка, есть серединный перпендикуляр к этому отрезку.

* Часто используется сокращение гмт.

** Вместо «геометрическое место точек, удовлетворяющих данному условию» говорят также «множество точек, удовлетворяющих данному условию».

(В) Геометрическое место точек, лежащих внутри угла и равноудалённых от его сторон, есть биссектриса этого угла.

Последняя формулировка обязательно требует уточнения, что речь идёт о точках, лежащих внутри угла. Утверждение (В) без этого уточнения просто неверно.

Разберём этот вопрос подробнее. В математике имеется общее определение расстояния от точки до геометрической фигуры.

Определение 66. Расстоянием от точки M до геометрической фигуры Φ называется наименьшее из расстояний MK , где K – произвольная точка геометрической фигуры Φ (при условии, что это наименьшее расстояние существует).

Ранее, в курсе геометрии 7–9 классов, мы давали отдельное определение расстояния от точки до прямой как длины перпендикуляра, проведённого из точки к прямой. Понятно, что это определение согласуется с более общим определением 70, являясь его частным случаем.

Рассмотрим теперь, как находится расстояние от точки до луча. Если точка принадлежит лучу, то расстояние равно нулю. Если точка не принадлежит лучу, то возможны два случая. Проведём через начальную точку A луча AB прямую l , перпендикулярную этому лучу. Эта прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Если точка M лежит в одной полуплоскости с лучом AB , то расстоянием от точки M до луча AB будет длина перпендикуляра MK , проведённого из точки M к лучу AB (рис. Д. 29а). Если же точка M лежит в разных полуплоскостях с лучом AB , то расстоянием от точки M до луча AB будет длина отрезка MA (рис. Д. 29б).

Основываясь на вышеизложенном, выполните самостоятельно задание:



Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от сторон данного угла (т.е. от двух лучей с общим началом).

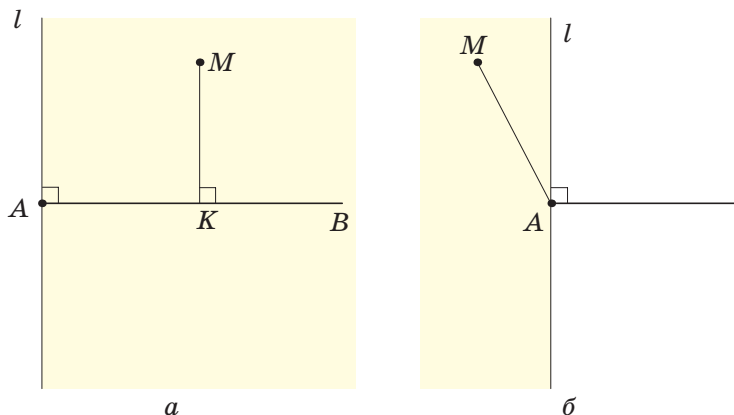


Рис. Д. 29

Вы увидите, что кроме биссектрисы угла, найденное вами гмт содержит и другие точки.

Заметим также, что если речь идёт о геометрическом месте точек, равноудалённых от прямых, содержащих стороны угла, то это гмт представляет собой две прямые, одна из которых содержит биссектрису данного угла, а другая содержит биссектрисы углов, смежных с данным. Легко доказать, что эти две прямые взаимно перпендикулярны.

Обоснуйте самостоятельно это утверждение.

Подумайте также над следующим заданием.



Как найти расстояние от точки до окружности? А от точки до круга?

При решении многих задач может быть успешно применён метод, называемый *методом геометрических мест*. Его суть заключается в следующем. Если нужно найти точки, удовлетворяющие одновременно двум условиям, то можно построить геометрические места точек, удовлетворяющих каждому из условий в отдельности, а затем взять их пересечение.

По сути, именно этим методом доказывались в курсе геометрии 7–9-го классов теоремы о вписанной и об описанной окружностях треугольника.

Ниже мы рассмотрим несколько важных геометрических мест точек, часто применяющихся при решении большого количества задач.

Перед тем, как формулировать условие первой из таких задач, дадим определение встречающегося в ней важного геометрического понятия.

Определение 67. Если AB – данный отрезок, а M – произвольная точка, не принадлежащая прямой AB , то *углом, под которым отрезок AB виден из точки M* называется угол при вершине M треугольника AMB (рис. Д. 30а).

ЗАДАЧА 1

Найдите геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом.

Решение

1. Нам дан отрезок AB .
2. Мы хотим найти геометрическое место таких точек M , что из них отрезок AB виден под данным углом α .
3. Пусть M – произвольная точка искомого гмт. Проведём отрезки MA и MB (построение). Тогда $\angle AMB = \alpha$ (рис. Д. 30а).
4. Опишем вокруг треугольника AMB окружность (построение) (рис. Д. 30б).
5. Рассмотрим дугу AMB построенной окружности, содержащую точку M , но не содержащую крайние точки A и B .

6. Из любой точки K этой дуги отрезок AB будет виден под одним и тем же углом α , поскольку углы AKB и AMB – вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу ASB (на рис. Д. 30б она показана пунктирной линией).

7. Кроме того, под тем же углом α будет виден отрезок и из точек дуги AM_1B , расположенной симметрично с дугой AMB относительно прямой AB (рис. Д. 30в).

8. Докажем, что ни из какой другой точки плоскости, не лежащей на одной из построенных дуг, отрезок AB не может быть виден под тем же углом α .

9. Из любой точки P , лежащей внутри фигуры, ограниченной дугами AMB и AM_1B , отрезок AB будет виден под углом APB , большим, чем α , поскольку величина угла APB будет равна полусумме угловых величин дуги ASB и еще некоторой дуги LN , т.е. будет больше α (рис. Д. 30г).

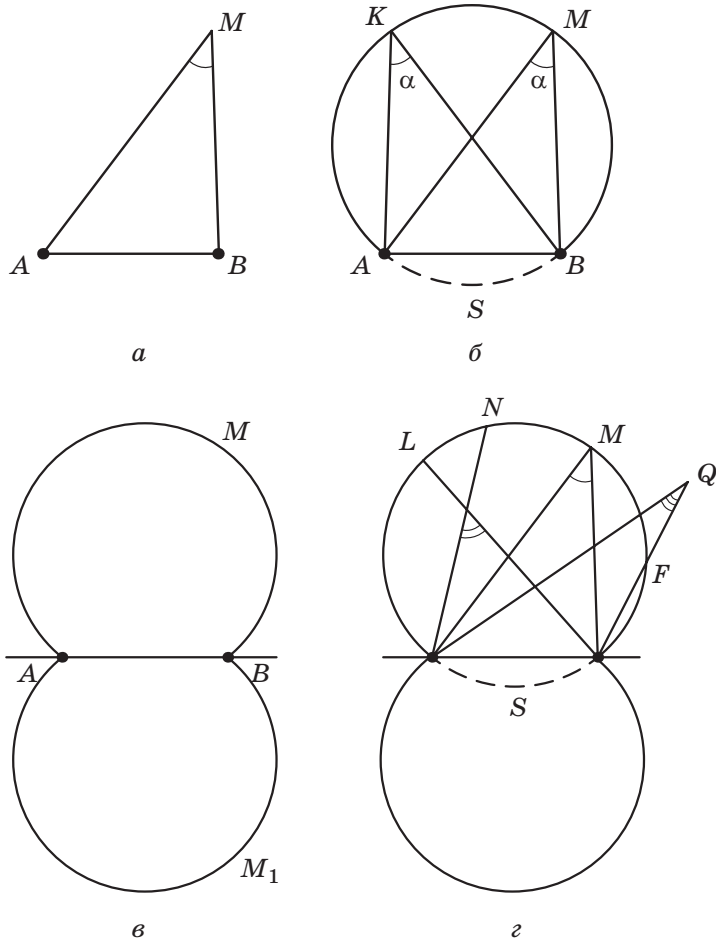


Рис. Д. 30

10. Аналогично, из любой точки Q , лежащей вне фигуры, ограниченной дугами AMB и AM_1B , отрезок AB будет виден под углом AQB , меньшим, чем α , поскольку величина угла AQB будет равна полуразности угловых величин дуги ASB и ещё некоторой дуги EF .

11. Таким образом, доказано, что точки дуг AMB и AM_1B (не включая точки A и B) и только они обладают требуемым свойством.

12. Установлено, что геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, состоит из двух дуг окружностей, симметрично расположенных относительно данного отрезка. ■

ЗАДАЧА 2

Найдите геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до данных двух пересекающихся прямых есть величина постоянная.

Решение

1. Нам даны две прямые b и c , пересекающиеся в точке A (рис. Д. 31а).

2. Мы хотим найти геометрическое место точек P , таких что $\frac{PB}{PC} = t$, где PB и PC – перпендикуляры, проведённые из точки P к прямым b и c соответственно, t – произвольное положительное действительное число (рис. Д. 31б).

3. Возьмём один из четырёх углов, образованных при пересечении прямых b и c . Пусть P – одна из точек искомого гмт, лежащая внутри этого угла*. Проведём прямую AP (построение) (рис. Д. 31б).

4. Докажем, что любая точка P_1 проведённой прямой, отличная от точки A , принадлежит искомому гмт. Действительно, если провести перпендикуляры P_1B_1 и P_1C_1 к прямым b и c соответственно (рис. Д. 31в), то треугольники PBC и $P_1B_1C_1$ гомотетичны друг другу** с центром гомотетии A , а значит, $\frac{P_1B_1}{P_1C_1} = \frac{PB}{PC} = t$.

5. Аналогично, с помощью гомотетии, устанавливается, что любая точка искомого гмт, лежащая с точкой P внутри одного и того же угла или взаимно вертикальных углов, принадлежит прямой AP .

6. Если взять точку P внутри одного из двух других взаимно вертикальных углов (они являются смежными для уже рассмотренных), то получим ещё одну аналогичную прямую, проходящую через точку A . Объединение этих двух прямых (с выколотой точкой A) и есть искомое гмт (рис. Д. 31г). ■

* Вопрос о том, как построить такую точку и всегда ли это возможно, будет обсуждён ниже.

** При этом для точек P_1 , лежащих внутри того же угла, что и точка P , коэффициент гомотетии будет положительным, а для точек P_2 , лежащих внутри вертикального угла, коэффициент гомотетии будет отрицательным.

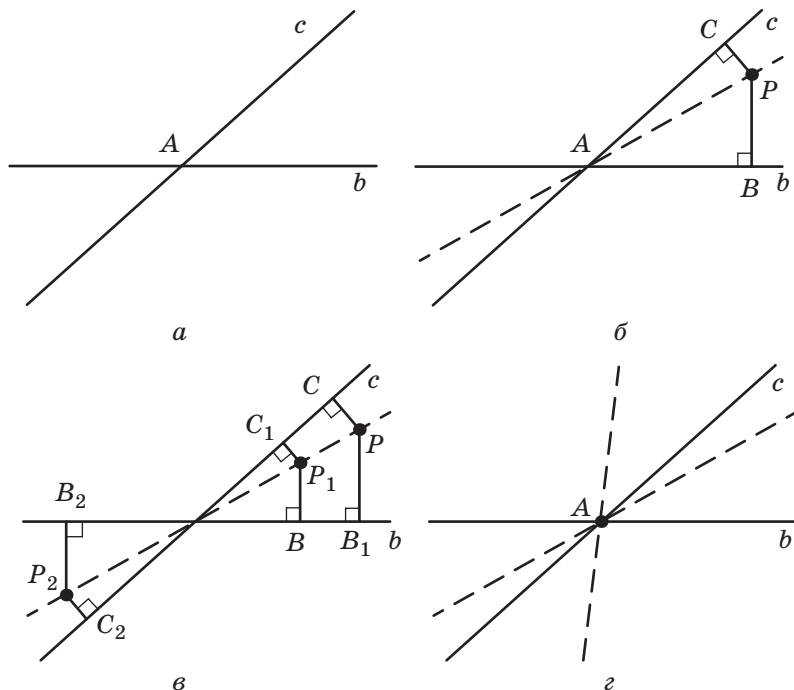


Рис. Д. 31

Подумайте самостоятельно над аналогичной задачей, если изначально вместо пересекающихся прямых взять параллельные.



Какой фигурой является геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до данных двух параллельных прямых есть величина постоянная?

ЗАДАЧА 3

Найдите геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до данных двух точек есть величина постоянная.

Решение

1. Нам даны две точки A и B .

2. Мы хотим найти геометрическое место точек P , таких что $\frac{PA}{PB} = t$, где

t – произвольное положительное действительное число, $t \neq 1$ (рис. Д. 32а)*.

* Мы уже знаем, что при $t = 1$ искомым гмт является серединный перпендикуляр к отрезку AB .

3. Рассмотрим на отрезке AB такую точку M , что $\frac{MA}{MB} = t$. Рассмотрим также на прямой AB вне отрезка AB такую точку N , что $\frac{NA}{NB} = t$ (понятно, что при $t > 1$ точка N будет лежать на луче, дополнительном к лучу BA , а при $0 < t < 1$ – на луче, дополнительном к лучу AB) (рис. Д. 32б, где $t > 1$)*.

4. Пусть P – одна из точек искомого гмт, отличная от точек M и N . Проведём отрезки PA , PB , а также отрезки PM и PN (построение) (рис. Д. 32б).

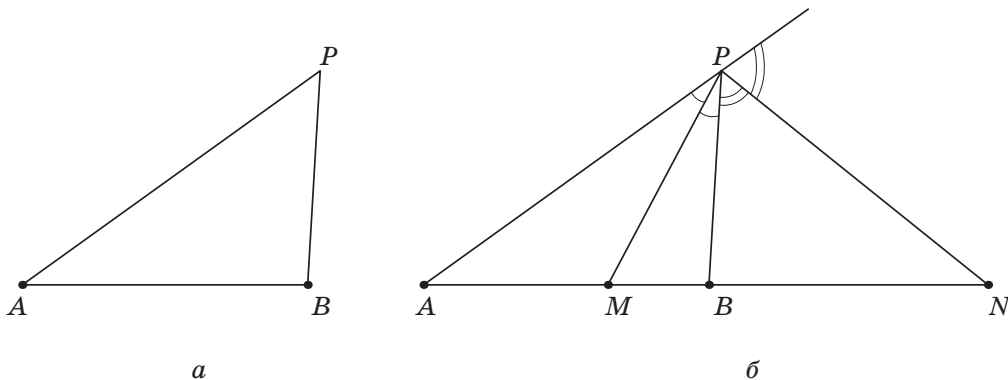


Рис. Д. 32

5. Поскольку $\frac{MA}{MB} = \frac{PA}{PB}$, то по теореме 62 PM – биссектриса треугольника PAB .

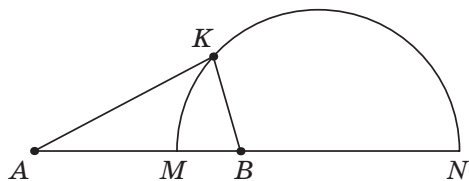
6. Поскольку $\frac{NA}{NB} = \frac{PA}{PB}$, то по теореме, обратной к теореме 63, PN – биссектриса внешнего угла при вершине P треугольника PAB .

7. Т.к. биссектрисы смежных углов образуют угол 90° , то $\angle MPN = 90^\circ$, а значит, точка P лежит на окружности, построенной на отрезке MN как на диаметре.

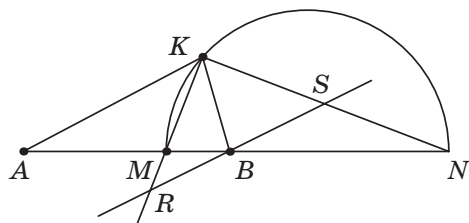
8. Теперь возьмём на окружности из п. 7 произвольную точку K , отличную от точек M и N , и докажем, что $\frac{KA}{KB} = t$ (рис. Д. 33а).

9. Проведём через точку B прямую, параллельную AK , которая пересекает прямые KM и KN соответственно в точках R и S (построение) (рис. Д. 33б).

* Вопрос о том, как построить такую точку и всегда ли это возможно, аналогичен вопросу, обсуждённому выше при решении задачи 2.



a



b

Рис. Д. 33

10. Треугольники AKM и BRM подобны ($\angle AMK = \angle BMR$ как вертикальные, $\angle AKM = \angle BRM$ как внутренние накрест лежащие для параллельных прямых AK и RS и их секущей KR), откуда $\frac{KA}{RB} = \frac{MA}{MB} = t$ (3, 7, 8, свойство подобных треугольников).

11. Треугольники AKN и BSN подобны ($\angle ANK$ общий, $\angle KAN = \angle SBN$ как соответственные для параллельных прямых AK и RS и их секущей AN), откуда $\frac{KA}{SB} = \frac{NA}{NB} = t$ (3, 7, 8, свойство подобных треугольников).

12. Из равенства $\frac{KA}{RB} = \frac{KA}{SB} = t$ заключаем, что $RB = SB$ (9.10).

13 (7). Таким образом, KB – медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника RKS , значит, $RB = SB = KB$, а т.к. из п. 7 $\frac{KA}{RB} = t$, то и $\frac{KA}{KB} = t$, что и требовалось.

14. Таким образом, установлено, что искомым гмт является окружность, построенная на отрезке MN как на диаметре. Она называется окружностью Аполлония точек A и B в честь открывшего её древнегреческого геометра Аполлония Пергского (262–192 г.г. до н.э.). ■



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ

Мы рассмотрим в этом параграфе несколько задач, при решении которых ключевую роль играют известные вам из курса геометрии 7–9-го классов геометрические преобразования, а также несколько задач на геометрические места точек.

ЗАДАЧА 1

Окружность пересекает сторону AB треугольника ABC в точках D и D_1 , сторону BC – в точках E и E_1 , сторону AC – в точках F и F_1 (эти точки могут быть взяты в произвольном порядке). Известно, что перпендикуляры к сторонам треугольника, проведённые в точках D , E , и F , пересекаются в одной точке. Докажите, что перпендикуляры к сторонам треугольника, проведённые в точках D_1 , E_1 , и F_1 , тоже пересекаются в одной точке.

Решение

Эта задача даёт пример довольно редкой ситуации, когда чертёж к самой задаче совершенно не нужен. Скорее чертёж здесь нужен для доказательства вспомогательного утверждения, на котором основывается решение. Вот это утверждение:

Если окружность с центром O пересекает некоторую прямую в точках M и K , то прямые, проходящие через точки M и K перпендикулярно прямой MK , симметричны одна другой относительно точки O .

1. Если прямая MK не проходит через центр O окружности (рис. Д. 34а), то проходящая через точку M перпендикулярно MK прямая пересекает окружность в такой точке P , что $\angle PMK = 90^\circ$. Поскольку вписанный прямой угол опирается на диаметр, то отрезок KP является диаметром окружности, а значит, точки P и K симметричны относительно центра окружности, точки O . Аналогично устанавливается, что точка T пересечения прямой KT MK с окружностью симметрична точке M относительно точки O . Отсюда следует, что прямые MP и KT симметричны относительно точки O .

2. Если прямая MK проходит через центр O окружности (рис. Д. 34б), то точки M и K симметричны относительно точки O . Возьмём на прямой, проходящей через точку M перпендикулярно MK , произвольную точку R . Пусть прямая RO пересекает прямую, проходящую через точку K перпендикулярно MK , в точке S . Прямоугольные треугольники RMO и SKO равны по катету ($MO = KO$ как радиусы) и острому углу ($\angle ROM = \angle SOK$ как вертикальные). Отсюда следует, что $RO = OS$, т.е. точки R и S симметричны относительно точки O . Таким образом, и в этом случае прямые RM и SK симметричны относительно точки O .

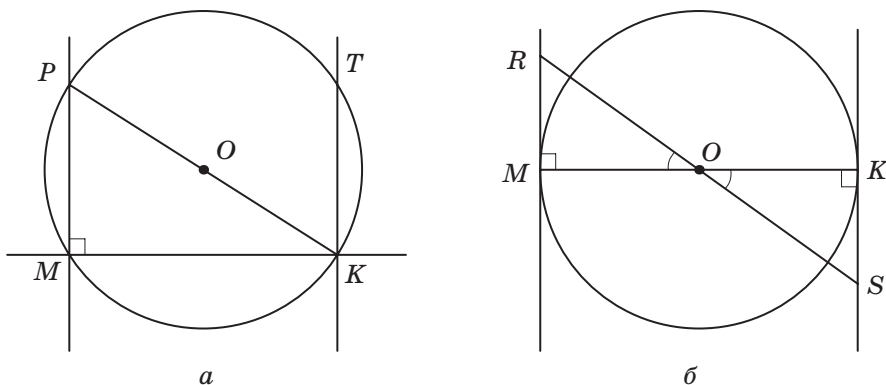


Рис. Д. 34

Перейдём к решению основной задачи. Прямые, проведённые в точках D , E , и F перпендикулярно сторонам треугольника, симметричны относительно центра окружности прямым проведённым в точках D_1 , E_1 , и F_1 соответственно. И если первая тройка прямых пересекается в некоторой точке L , то и вторая тройка прямых тоже пересекается в одной точке (симметричной точке L относительно центра окружности). ■

Замечание. Утверждение задачи останется верным, если некоторые из точек D , D_1 , E , E_1 , F , F_1 (даже все шесть!) находятся не самих сторонах треугольника ABC , а их продолжениях.

ЗАДАЧА 2

Постройте равносторонний треугольник, по одной вершине которого лежит на каждой из данных трёх параллельных прямых.

Решение

Нам даны три параллельные прямые $a \parallel b \parallel c$. Требуется построить три точки $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ так, чтобы $AB = BC = AC$.

Анализ. Предположим, что мы построили три такие точки $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, что $\triangle ABC$ – равносторонний (рис. Д. 35а). Если мы выполним поворот с центром в точке C на 60° против часовой стрелки, то точка A при этом повороте перейдёт в точку $B \in b$. Но при этом же повороте прямая a перейдёт в некоторую прямую a_1 , причём поскольку $A \in a$, то $B \in a_1$. Получается, что точка B принадлежит и прямой b , и прямой a_1 , т.е. является их точкой пересечения.

Построение. Проведённый анализ позволяет выполнить следующие построения:

1. Возьмём на прямой c произвольную точку C .
2. Выполним поворот прямой a на 60° против часовой стрелки с центром поворота в точке C . Получим прямую a_1 (рис. Д. 35а).
3. Пусть B – точка пересечения прямых b и a_1 .
4. Построим серединный перпендикуляр к отрезку BC (рис. Д. 35а).
5. Пусть A – точка пересечения серединного перпендикуляра с прямой a .
6. Треугольник ABC – искомым.

Доказательство. По построению $\triangle ABC$ – равнобедренный (п. 4, 5), причём у него $\angle ACB = 60^\circ$ (п. 2, 3). Отсюда следует, что $\triangle ABC$ – равносторонний.

Исследование. При уже выбранной на прямой c вершине C задача имеет два решения, поскольку поворот прямой a с центром поворота в точке C можно выполнять как на 60° против часовой стрелки, так и на 60° по часовой стрелке. ■

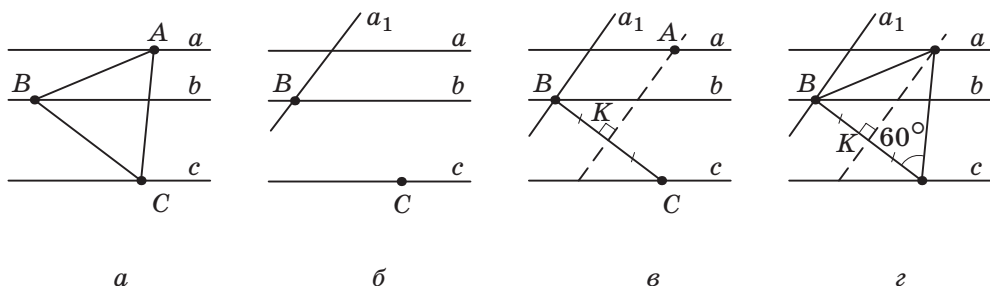


Рис. Д. 35

ЗАДАЧА 3

В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC биссектрисы углов A и B пересекаются в точке E , а биссектрисы углов C и D – в точке F . Докажите, что $|AD + BC - AB - CD| = 2 \cdot EF$.

Решение

1. Трапеция $ABCD$.
2. Точки E и F , такие что EA – биссектриса $\angle A$,
 EB – биссектриса $\angle B$, FC – биссектриса $\angle C$,
 FD – биссектриса $\angle D$. } (дано) (рис. Д. 36а)
3. $|AD + BC - AB - CD| = 2 \cdot EF$ (требуется доказать).
4. Т.к. E – точка пересечения биссектрис углов A и B , то она равноудалена от прямых AD и BC : $EM = EN$ (рис. Д.36 б). Аналогично $FK = FL$.
5. Отсюда заключаем, что каждый из отрезков EN и FL имеет длину, равную половине расстояния между параллельными прямыми AD и BC , а значит, $NEFL$ – прямоугольник, и отрезок EF параллелен основаниям AD и BC трапеции $ABCD$ (рис. Д.36б).
6. Выполним параллельный перенос треугольника CFD на вектор FE (построение) (рис. Д.36 в). Точка F при этом перейдёт в точку E , а точки D и C – в точки D_1 и C_1 , лежащие соответственно на прямых AD и BC .
7. Точка E является точкой пересечения биссектрис всех четырёх углов трапеции ABC_1D_1 , а значит, она равноудалена от всех её сторон, и в эту трапецию можно вписать окружность.
8. По свойству описанного четырёхугольника $AD_1 + BC_1 = AB + C_1D_1$, т.е. $AD_1 + BC_1 - AB - C_1D_1 = 0$ (Т. 77).

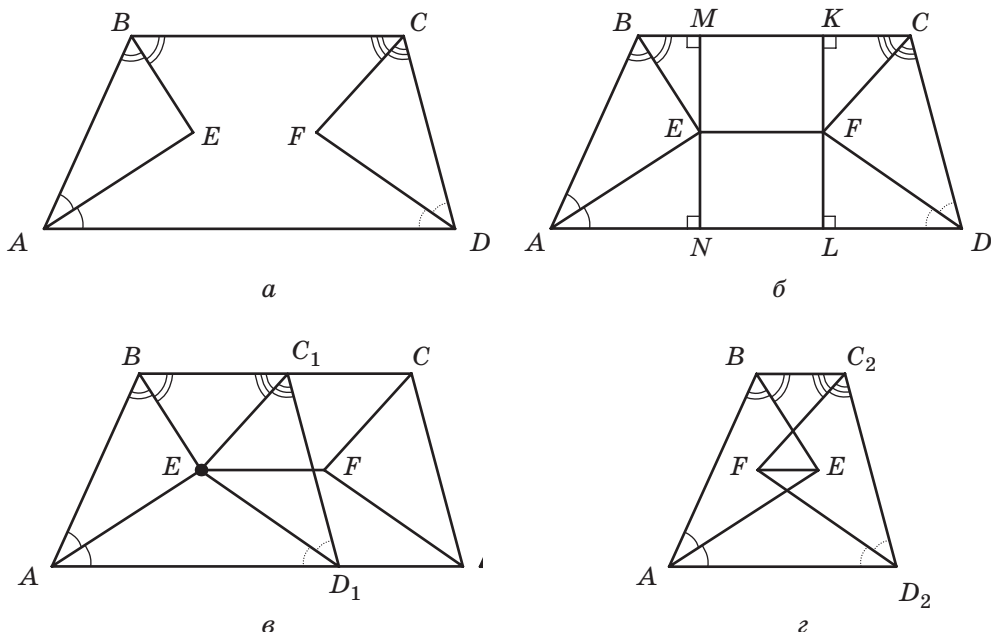


Рис. Д. 36

9. Но по свойствам параллельного переноса $EF = C_1C = D_1D$, а также $C_1D_1 = CD$.

10. В случае конфигурации, изображённой на рис. Д. 36г, прибавим к правой части равенства $AD_1 + BC_1 - AB - C_1D_1 = 0$ выражение $2 \cdot EF$, а к левой – равное ему выражение $C_1C + D_1D$ и заменим C_1D_1 на CD . В результате получим $AD_1 + D_1D + BC_1 + C_1C - AB - CD = 2 \cdot EF$, или $|AD + BC - AB - CD| = 2 \cdot EF$, что требовалось.

11. Для конфигурации, изображённой на рис. Д. 36г, на последнем шаге придётся на прибавлять, а вычитать те же самые выражения. Проведите аккуратные выкладки самостоятельно. ■

Заметим, хотя это и не имеет отношения к решению рассмотренной задачи, что углы BEA и CFD – прямые (рис. Д. 36а).

Следующие две задачи будут посвящены одному из самых мощных методов решения задач на построения – *методу подобия*. В значительном количестве задач на построение данные задачи можно разбить на две группы: первая группа данных определяет форму искомой фигуры, а другая – её размеры.

Как раз для решения таких задач удобно использовать метод подобия. Он состоит в том, что, сначала, используя первую группу данных, вместо искомой фигуры строят фигуру, подобную ей, а затем, используя вторую группу данных, строят искомую фигуру.

ЗАДАЧА 4

Постройте треугольник по двум углам A и B и биссектрисе l_c третьего угла.

Решение

Прежде всего, выделим две группы данных (рис. Д. 37а):

1. Данные, определяющие форму искомой фигуры: углы A и B , определяют треугольник, подобный искомому на основании признака подобия треугольников по двум углам.

2. Биссектриса l_c третьего угла треугольника, определяет размеры искомого треугольника.

Анализ.

1. Предположим, что задача решена, и искомый треугольник ABC построен (рис. Д. 37б). Метод подобия состоит в том, что мы сначала строим треугольник $A_1B_1C_1$, подобный $\triangle ABC$, т.к. сразу построить $\triangle ABC$ невозможно.

2. Затем строим биссектрису угла C – CD_1 и на луче CD_1 откладываем отрезок $CD = l_c$.

3. Через полученную точку D проводим прямую $AB \parallel A_1B_1$.

4. $\triangle ABC$ – искомый (рис. Д. 37б).

Построение. Все этапы построения оговорены в анализе. Выполните их самостоятельно.

Самостоятельно проведите также доказательство того, что $\triangle ABC$ искомый и исследуйте проведенное решение. ■

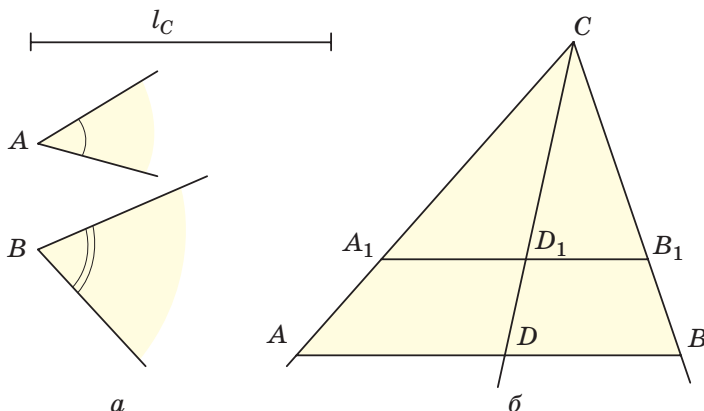


Рис. Д. 37

ЗАДАЧА 5

В данный треугольник впишите квадрат так, чтобы две его вершины лежали на основании треугольника, а две другие – на его боковых сторонах.

Решение

Анализ. Предположим, что задача решена и искомый квадрат $N_1P_1Q_1M_1$ построен (рис. Д. 38). Можно ли его построить сразу? Нет. Помогает метод подобия. Можно построить квадрат, подобный искомому. Три его вершины будут удовлетворять условиям задачи. Для этого надо взять точку M на стороне AB , провести через неё перпендикуляр MN к стороне AC и отложить отрезок $MQ = MN$ (рис. Д. 38) (обоснуйте этот вывод). Четвёртая вершина P не обязательно будет лежать на стороне BC , как требуется в задаче. Искомый квадрат $N_1P_1Q_1M_1$ может быть получен из построенного квадрата $NPQM$ при гомотетии с центром A и коэффициентом $k = AP_1 : AP$.

Построение.

1. Построим квадрат $NPQM$, подобный искомому (рис. Д. 38).
2. Проведём луч AP , который пересечёт BC в точке P_1 – вершине искомого квадрата (рис. Д. 38).
3. Проведём через P_1 перпендикуляр P_1Q_1 к AC , получим первую сторону искомого квадрата.

Дальнейшее построение выполните самостоятельно. Также самостоятельно проведите доказательство того факта, что четырёхугольник $N_1P_1Q_1M_1$ – искомый квадрат. ■

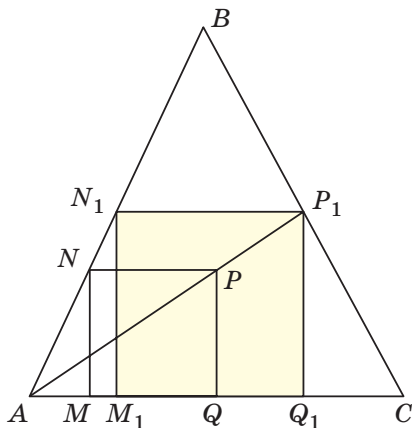


Рис. Д. 38

ЗАДАЧА 6 (ЗАДАЧА ФАНЬЯНО*)

Дан остроугольный треугольник ABC . Найти на его сторонах BC , AC , AB такие точки U , V , W соответственно, чтобы треугольник UVW ** имел наименьший периметр.

Решение

1. Рассмотрим сначала произвольный треугольник UVW , у которого вершина U лежит на стороне BC , вершина V – на AC , а вершина W – на AB .

2. Пусть U_1 и U_2 – точки, симметричные точке U относительно прямых AC и AB соответственно.

3. Тогда $UV + VW + WU = U_1V + VW + WU_2$.

4. Правая часть этого равенства представляет собой некоторый путь из точки U_1 в точку U_2 , который, вообще говоря, является ломаной с промежуточными вершинами в точках V и W (рис. Д. 39а).

5. Этот путь минимален, когда ломаная превращается в прямолинейный отрезок, как показано на рис. Д. 39б.

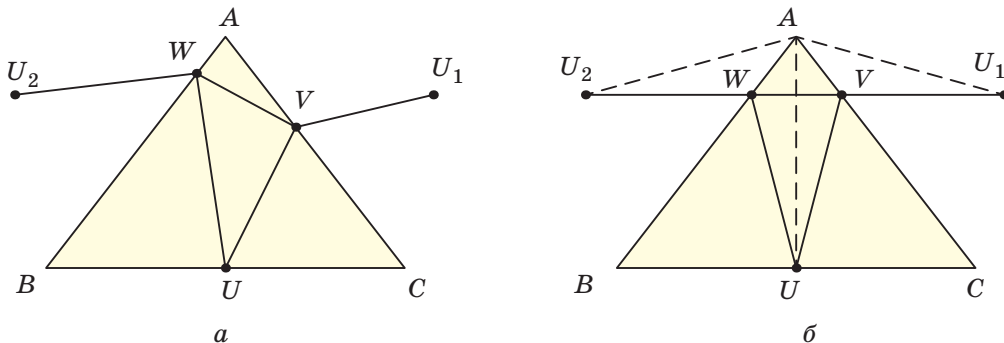


Рис. Д. 39

6. Итак, среди всех вписанных треугольников с данной вершиной U на стороне BC треугольник наименьшего периметра получается, когда вершины V и W принадлежат прямой U_1U_2 .

7. Таким образом, для каждого положения точки U на стороне BC мы получим определенный треугольник UVW .

8. Задача будет решена, когда мы выберем точку U так, чтобы отрезок U_1U_2 , равный периметру треугольника UVW , имел наименьшую возможную длину.

9. Т.к. отрезки AU_1 и AU_2 симметричны отрезку AU относительно прямых AC и AB , то они равны и $\angle U_1AU_2 = 2A$.

* Эта задача была поставлена в 1775 году итальянским математиком Джанфранческо Фаньяно деи Тоски (1715–1797), который решил её средствами дифференциального исчисления.

** Такой треугольник часто называют вписанным в треугольник ABC .

10. Таким образом, AU_1U_2 – равнобедренный треугольник, у которого угол при вершине A не зависит от выбора точки U .

11. Его основание U_1U_2 минимально, когда минимальны боковые стороны AU_1 и AU_2 , т. е. когда минимален отрезок AU .

12. Другими словами, отрезок AU должен быть кратчайшим расстоянием от данной точки A до данной прямой BC . Отсюда ясно, что положение точки U таково, что AU перпендикулярна BC . Таким образом, AU – высота, проведённая из вершины A .

13. Это положение точки U определяет единственный треугольник UVW , периметр которого меньше, чем у всех других вписанных треугольников. Т.к. мы могли начать с точки B или C вместо A , отрезки BV и CW также должны быть высотами, проведёнными из точек B и C .

14. Следовательно, наименьший периметр из всех треугольников, вписанных в остроугольный треугольник ABC , имеет треугольник с вершинами в основаниях высот треугольника ABC . ■

ЗАДАЧА 7 (ЗАДАЧА ФЕРМА*)

Найдите внутри остроугольного треугольника ABC такую точку P , для которой сумма расстояний до вершин A , B и C была бы наименьшей.

Решение

1. Выберем сначала некоторую точку P внутри треугольника. Соединим её с точками A , B , C и повернём внутренний треугольник APB на 60° вокруг точки B (построение) (рис. Д. 40а).

2. Треугольник APB займёт такое положение C_1P_1B , что ABC_1 и PBP_1 – равносторонние треугольники (на рис. Д. 40а).

3. Тогда выполняется равенство $AP + PB + CP = C_1P_1 + P_1P + PC$ (1, 2).

4. Правая часть этого равенства представляет собой длину пути из точки C_1 в точку C , который, вообще говоря, является ломаной линией, с вершинами в точках P_1 и P .

5. Длина ломаной C_1P_1PC будет минимальной, когда эта ломаная превращается в отрезок. В этом случае $\angle BPC = 180^\circ - \angle BPP_1 = 120^\circ$ и $\angle APB = \angle C_1P_1B = 180^\circ - \angle PP_1B = 120^\circ$.

6. Таким образом, искомая точка P , для которой сумма $AP + PB + CP$ минимальна, – это точка, из которой каждая сторона BC , CA , AB видна под углом 120° .

7. Эту точку (её часто называют точкой Ферма треугольника ABC) проще всего построить как точку пересечения прямой CC_1 и окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC_1 . ■

Замечание 1. Приведённое выше решение задачи Ферма верно не только

* Эта задача была предложена французским математиком Пьером Ферма (1601–1665).

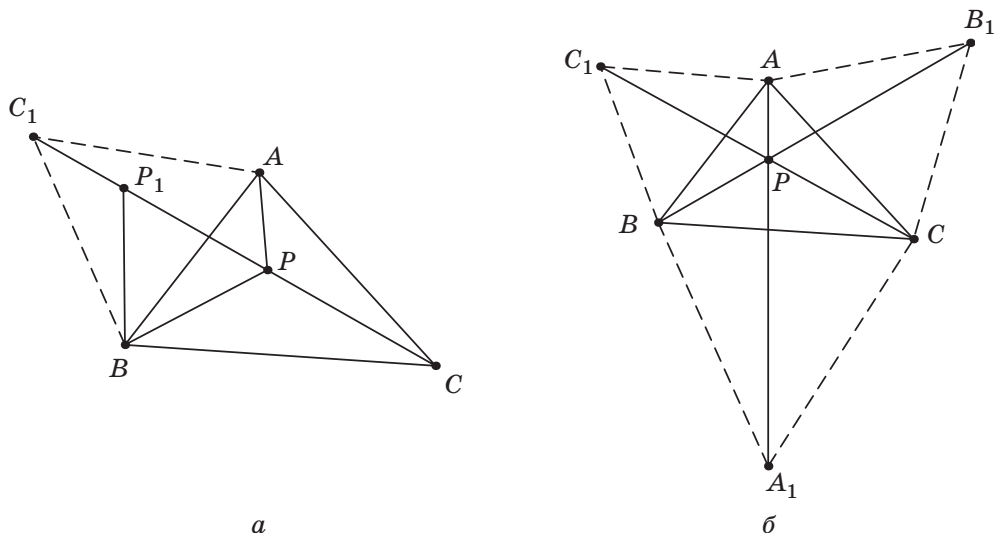


Рис. Д. 40

для остроугольного треугольника. Оно остаётся в силе, когда все углы треугольника не превосходят 120° .

Замечание 2. Вместо равностороннего треугольника ABC_1 , построенного на стороне AB , мы могли бы с таким же успехом построить равносторонний треугольник BCA_1 на стороне BC или равносторонний треугольник CAB_1 на стороне CA , как показано на рис. Д. 40б. Таким образом, три прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 проходят через точку Ферма P и любые две из них дают другое построение этой точки. Кроме того, каждый из отрезков AA_1 , BB_1 и CC_1 равен $AP + BP + CP$. Следовательно, доказано следующее утверждение:

Если на сторонах некоторого треугольника ABC во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники BCA_1 , CAB_1 , ABC_1 , то отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 равны, пересекаются в одной точке и образуют попарно углы в 60° .

ЗАДАЧА 8 (ПРЯМАЯ ЭЙЛЕРА*)

Докажите, что в любом треугольнике точка M пересечения медиан, точка H пересечения высот и центр O описанной окружности лежат на одной прямой (называемой прямой Эйлера), причём точка M лежит на отрезке между точками H и O , деля его в отношении $2 : 1$, считая от точки H .

Решение

* Леонард Эйлер (1707–1783) – выдающийся математик, родившийся в Швейцарии, большую часть жизни проработавший в России.

1. Для равностороннего треугольника точки M , H и O совпадают. Наши дальнейшие рассуждения и чертёж выполнены для остроугольного треугольника, но они легко переносятся и на тупоугольный треугольник.

2. Если треугольник ABC не равносторонний, то проведём прямую MO через точку пересечения его медиан и центр описанной окружности (построение) (рис. Д. 41).

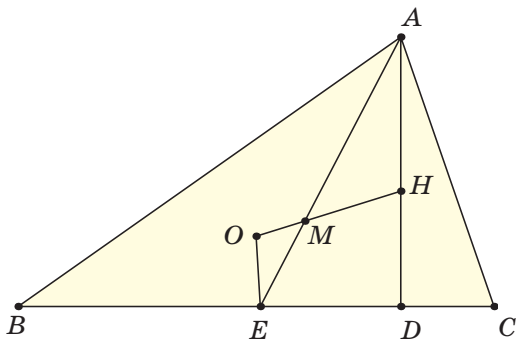


Рис. Д. 41

3. Отложим на прямой OM отрезок MN так, чтобы точка M лежала на отрезке ON и при этом $MN = 2MO$ (построение) (рис. Д. 41).

4. Проведём медиану AE треугольника ABC и прямую AN до пересечения со стороной BC в точке D (построение) (рис. Д. 41).

5. Т.к. $MA = 2ME$ (по свойству точки пересечения медиан) и $MN = 2MO$ (по построению), то треугольники MNA и MOE подобны ($\angle AMN = \angle EMO$ как вертикальные, а образующие их стороны пропорциональны), и поэтому $\angle MAN = \angle MEO$ (свойство подобных треугольников).

6. Поскольку углы MAN и MEO – внутренние накрест лежащие для прямых AN и OE и их секущей AE , то прямые AN и OE параллельны.

7. Но прямая OE представляет собой серединный перпендикуляр к отрезку BC , т.е. $OE \perp BC$, значит, и $AN \perp BC$. Другими словами, BD – высота, проведённая к стороне BC .

8. Рассуждая аналогично, можно показать, что прямая BH перпендикулярна к CA , а прямая CH – прямой AB .

9. Таким образом, точка H является точкой пересечения высот треугольника ABC , и утверждение задачи доказано. ■

ЗАДАЧА 9 (ОКРУЖНОСТЬ ДЕВЯТИ ТОЧЕК)

Докажите, что в любом треугольнике три середины сторон, три основания высот и три точки, делящие пополам отрезки высот от точки их пересечения до вершин, лежат на одной окружности (называемой окружностью девяти точек).

Решение

1. Пусть точки $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ – соответственно середины отрезков BC, CA, AB, HA, HB, HC , а точки D, E, F – основания высот треугольника ABC , как показано на рис. Д. 42.

2. Отрезки C_1B_1 и C_2B_2 параллельны BC как средние линии треугольни-

ков ABC и HBC соответственно, а отрезки B_1C_2 и C_1B_2 параллельны AH как средние линии треугольников ACH и ABH соответственно.

3. Таким образом, четырёхугольник $B_1C_1B_2C_2$ – параллелограмм, а поскольку ещё прямая AH перпендикулярна прямой BC , то четырёхугольник $B_1C_1B_2C_2$ – прямоугольник.

4. Аналогичные рассуждения показывают, что $C_1A_1C_2A_2$ – тоже прямоугольник.

5. Следовательно, отрезки A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 все равны между собой и делятся в общей точке пересечения пополам, т.е. это три диаметра некоторой окружности.

6. Так как эти диаметры стягивают прямые углы с вершинами в точках D , E , F , то эта окружность проходит также через эти три точки. ■

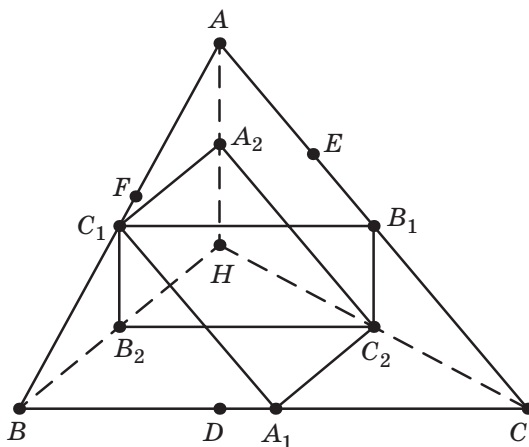


Рис. Д. 42

§ Д.7



ТЕОРЕМА ЧЕВЫ И ТЕОРЕМА МЕНЕЛАЯ

Д.7.1. ТЕОРЕМА ЧЕВЫ

Из курса геометрии 7–9-го классов вы знаете, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке. В одной точке пересекаются также три биссектрисы и три высоты (или их продолжения) любого треугольника. Соответственные теоремы были доказаны в нашем учебнике геометрии для

7–9-го классов.

Можно поставить такой вопрос.



На каждой стороне треугольника взята точка (отличная от вершины) и соединена с вершиной, противоположной этой стороне. При каком условии полученные три отрезка пересекаются в одной точке?

Ответ на поставленный вопрос даёт теорема, которую в 1678 году доказал Джованни Чева (1648–1734), профессор математики Пизанского университета.

Теорема 79 (теорема Чевы). Если на сторонах AB , AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M , N и K , то отрезки AK , BN и CM пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{AN}{NC} \cdot \frac{CK}{KB} \cdot \frac{BM}{MA} = 1$.

Доказательство

Нам нужно доказать два взаимно обратных утверждения:

(А) Если отрезки AK , BN и CM пересекаются в одной точке, то выполняется равенство $\frac{AN}{NC} \cdot \frac{CK}{KB} \cdot \frac{BM}{MA} = 1$.

(Б) Если выполняется равенство $\frac{AN}{NC} \cdot \frac{CK}{KB} \cdot \frac{BM}{MA} = 1$, то отрезки AK , BN и CM пересекаются в одной точке.

Докажем сначала утверждение (А).

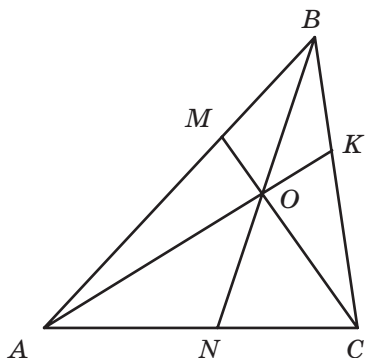
1. Треугольник ABC .
 2. Точки M , N и K на сторонах AB , AC , BC соответственно.
 3. Отрезки AK , BN и CM пересекаются в одной точке O .
 4. $\frac{AN}{NC} \cdot \frac{CK}{KB} \cdot \frac{BM}{MA} = 1$ (требуется доказать).
- } (дано)

5. Опустим из вершин A и C перпендикуляры AP и CT на прямую BN (построение) (рис. Д. 43б).

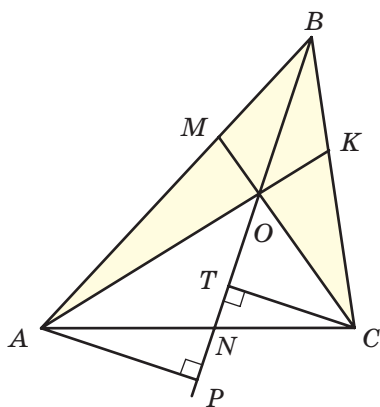
6. Прямоугольные треугольники ANP и CNT подобны, поскольку $\angle ANP = \angle CNT$ как вертикальные, значит, $\frac{AN}{NC} = \frac{AP}{CT}$ (1, 2, 3, свойство подобных треугольников).

7. Рассмотрим треугольники ABO и CBO с общим основанием BO (рис. Д. 43б).

Поскольку высотами, проведёнными к этому основанию, являются соответственно отрезки AP и CT , то $\frac{S_{ABO}}{S_{CBO}} = \frac{AP}{CT}$.



a



б

Рис. Д. 43

8. Сравнив равенство отношений в п. 6 и п. 7, получаем $\frac{AN}{NC} = \frac{S_{ABO}}{S_{CBO}}$ (6, 7).

9. Рассуждая аналогично, можно установить, что $\frac{CK}{KB} = \frac{S_{ACO}}{S_{ABO}}$ и $\frac{BM}{MA} = \frac{S_{CBO}}{S_{ACO}}$.

10 (4). Перемножив последние три равенства, получим:

$$\frac{AN}{NC} \cdot \frac{CK}{KB} \cdot \frac{BM}{MA} = \frac{S_{ABO}}{S_{CBO}} \cdot \frac{S_{ACO}}{S_{ABO}} \cdot \frac{S_{CBO}}{S_{ACO}} = 1 \quad (8, 9). \blacksquare$$

Теперь докажем утверждение (Б).

1. Треугольник ABC .

2. Точки M , N и K на сторонах AB , AC , BC соответственно.

3. $\frac{AN}{NC} \cdot \frac{CK}{KB} \cdot \frac{BM}{MA} = 1$.

} (дано)

4. Отрезки AK , BN и CM пересекаются в одной точке (требуется доказать).

5. Предположим, что доказываемое утверждение (Б) неверно, и отрезки AK , BN и CM не пересекаются в одной точке (предположение) (рис. Д. 44а).

6. Проведём из вершины B через точку D пересечения отрезков AK и CM отрезок BE так, чтобы точка E лежала на стороне AC (построение) (рис. Д. 44б).

7. Согласно утверждению (А) для отрезков AK , BE и CM , пересекающихся в одной точке, имеем: $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CK}{KB} \cdot \frac{BM}{MA} = 1$ (6, А).

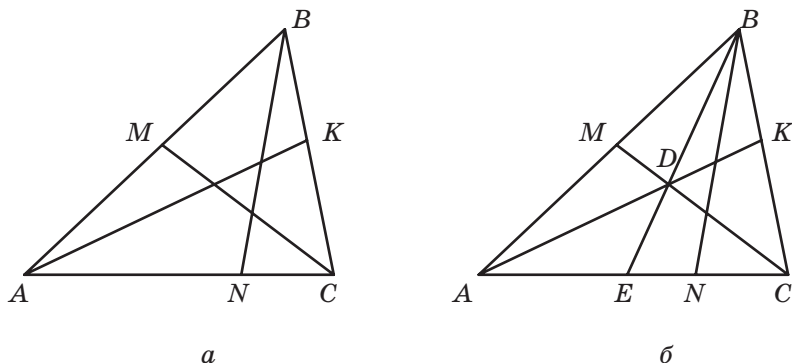


Рис. Д. 44

8. Из равенств $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CK}{KB} \cdot \frac{BM}{MA} = 1$ (7) и $\frac{AN}{NC} \cdot \frac{CK}{KB} \cdot \frac{BM}{MA} = 1$ (3) заключаем, что $\frac{AE}{EC} = \frac{AN}{NC}$ (3, 7).

9 (4). По теореме 60 точки E и N совпадают. Это значит, что наше предположение из п. 5 неверно, и отрезки AK , BN и CM пересекаются в одной точке (8, Т. 61). ■

Теорема Чевы полностью доказана.

Фигурирующее в теореме Чевы условие равенства единице произведения трёх отношений (в нашей формулировке оно имеет вид $\frac{AN}{NC} \cdot \frac{CK}{KB} \cdot \frac{BM}{MA} = 1$) называют *условием Чевы*. Его можно записать в шести различных равносильных формах. Для этого нужно выбрать любую вершину треугольника и направление обхода его сторон (по или против часовой стрелки). Идя из одной вершины в следующую, мы проходим через точку на соответствующей стороне. Первый из встретившихся отрезков записываем в числителе дроби, а второй – в знаменателе.

Так, приведённая выше запись условия Чевы в виде $\frac{AN}{NC} \cdot \frac{CK}{KB} \cdot \frac{BM}{MA} = 1$ соответствует обходу треугольника ABC против часовой стрелки, начиная с вершины A (рис. Д. 44а) (проверьте!). Если, скажем, обходить треугольник ABC по часовой стрелки, начиная с вершины B , то условие Чевы запишется так: $\frac{BK}{KC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1$ (рис. Д. 44а) (проверьте!).

Существует несколько обобщений теоремы Чевы.

В первом из них вместо произведения отношений отрезков берётся произведение отношений синусов углов, на которые отрезки, выходящие из вер-

шин, делят углы исходного треугольника. При этом условие Чевы для синусов тоже может быть записано в шести различных равносильных формах по тому же принципу, что и условие Чевы для отрезков. В приведённой ниже формулировке мы запишем его для обхода треугольника ABC против часовой стрелки, начиная с вершины A .

Теорема 80 (теорема Чевы в форме синусов). Если на сторонах AB , AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M , N и K , то отрезки AK , BN и CM пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin \angle BAK}{\sin \angle CAK} \cdot \frac{\sin \angle ACM}{\sin \angle BCM} \cdot \frac{\sin \angle CBN}{\sin \angle ABN} = 1.$$

Доказательство

Теорема Чевы в форме синусов сводится к обычной теореме Чевы (теорема 79). Для этого достаточно показать равносильность условия Чевы для синусов некоторому условию Чевы для отрезков. Сделать это можно, например, с помощью теоремы синусов.

1. Запишем теорему синусов для треугольников BAK и CAK .

Для $\triangle BAK$: $\frac{BK}{\sin \angle BAK} = \frac{AK}{\sin \angle ABC}$, откуда $\sin \angle BAK = \frac{BK \cdot \sin \angle ABC}{AK}$.

Для $\triangle CAK$: $\frac{KC}{\sin \angle CAK} = \frac{AK}{\sin \angle ACB}$, откуда $\sin \angle CAK = \frac{KC \cdot \sin \angle ACB}{AK}$.

Деля первое из полученных равенств на второе, получим:

$$\frac{\sin \angle BAK}{\sin \angle CAK} = \frac{BK \cdot \sin \angle ABC}{AK} \cdot \frac{AK}{KC \cdot \sin \angle ACB} = \frac{BK}{KC} \cdot \frac{\sin \angle ABC}{\sin \angle ACB}.$$

2. Аналогично, записывая теорему синусов для треугольников ACM и BCM , получим: $\frac{\sin \angle ACM}{\sin \angle BCM} = \frac{AM}{MB} \cdot \frac{\sin \angle BAC}{\sin \angle ABC}$.

3. Аналогично, записывая теорему синусов для треугольников CBN и ABN , получим: $\frac{\sin \angle CBN}{\sin \angle ABN} = \frac{CN}{NA} \cdot \frac{\sin \angle ACB}{\sin \angle BAC}$.

4. Перемножая равенства, полученные в п.п. 1, 2 и 3, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \angle BAK}{\sin \angle CAK} \cdot \frac{\sin \angle ACM}{\sin \angle BCM} \cdot \frac{\sin \angle CBN}{\sin \angle ABN} &= \frac{BK}{KC} \cdot \frac{\sin \angle ABC}{\sin \angle ACB} \cdot \frac{AM}{MB} \cdot \frac{\sin \angle BAC}{\sin \angle ABC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{\sin \angle ACB}{\sin \angle BAC} = \\ &= \frac{BK}{KC} \cdot \frac{AM}{MB} \cdot \frac{CN}{NA} = \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AM}{MB} \quad (\text{мы переставили два последних сомножителя}). \end{aligned}$$

5. Осталось убедиться, что последнее произведение содержится в условии Чевы для отрезков при обходе треугольника ABC по часовой стрелки, начиная с вершины B (как раз его мы выписывали перед формулировкой теоремы Чевы в форме синусов).

6. Доказано, что теорема Чевы в форме синусов равносильна теореме (обычной теореме Чевы). ■

Второе обобщение теоремы Чевы заключается в том, что точки можно выбирать не только на сторонах треугольника, но и на их продолжениях (и тогда уже прямые, а не отрезки, соединяющие эти отрезки с противоположными вершинами треугольника, могут пересекаться в точке, лежащей вне треугольника).

Теорема 81 (обобщённая теорема Чевы). Если на прямых, содержащих стороны AB , AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M , N и K , то прямые AK , BN и CM пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{AN}{NC} \cdot \frac{CK}{KB} \cdot \frac{BM}{MA} = 1$.

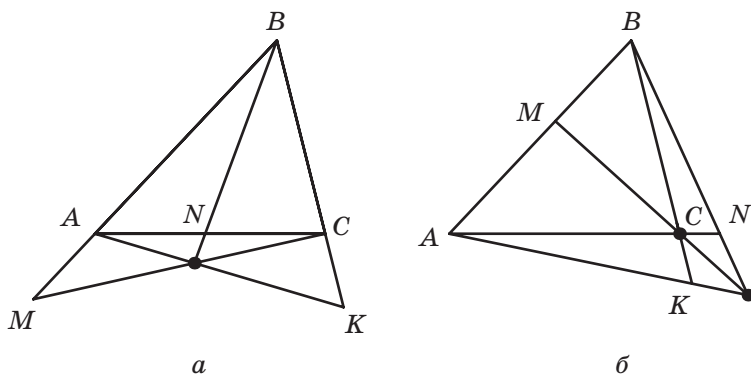


Рис. Д. 45

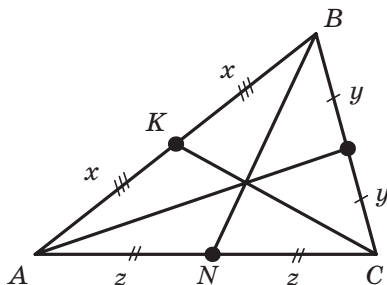
На рис. Д. 45 приведены две возможные конфигурации, возникающие в обобщённой теореме Чевы. Подумайте над доказательством этой теоремы самостоятельно.

Д.7.2. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЧЕВЫ

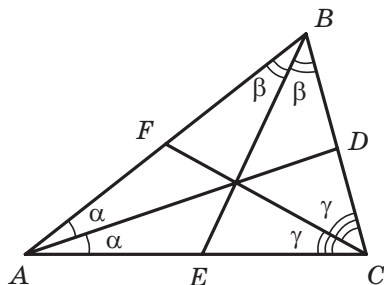
Чаще всего теорема Чевы используется «по прямому назначению», т.е. при выяснении вопроса, пересекаются ли данные три прямые в одной точке, причём с помощью теоремы Чевы обычно (хотя и не всегда*) это делается гораздо проще, чем с помощью других соображений.

* Вспомните, например, задачу 1 из параграфа Д. 6.

Вспомните, например, как вы доказывали в курсе геометрии 8-го класса, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке (параграф 10.5, теорема 46). Это было весьма непростое доказательство. С помощью теоремы Чевы оно получается в половину строки (рис. Д. 46а): $\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{z}{z} = 1$.



а



б

Рис. Д. 46

Так же быстро доказывается, что три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (рис. Д. 46б). Применим теорему Чевы в форме синусов, обходя треугольник ABC , начиная с вершины A , по часовой стрелке: $\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma} = 1$ – и всё, утверждение доказано.

Рассмотрим ещё несколько задач.

ЗАДАЧА 1

Докажите, что три отрезка, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с вписанной окружностью, пересекаются в одной точке*.

Решение

1. Треугольник ABC .
2. ω – окружность, вписанная в $\triangle ABC$.
3. M, N, K – точки касания окружности ω со сторонами BC, AC, AB соответственно.
4. Отрезки AM, BN и CK пересекаются в одной точке (требуется доказать).

} (дано) (рис. Д. 47)

* Эта точка называется точкой Жергонна в честь французского математика Жозефа Диаса Жергонна (1771–1859).

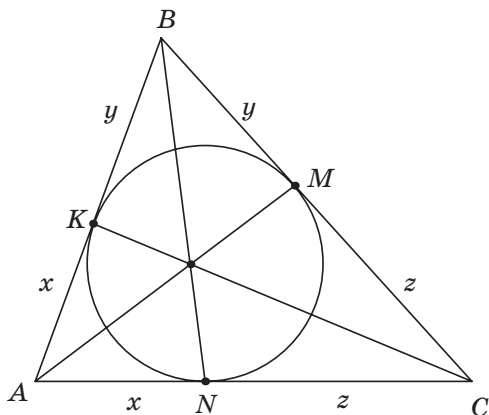


Рис. Д. 47

5. Касательные к окружности, проведённые из одной точки, равны, потому запишем равенства: $AK = AN = x$, $BK = BM = y$, $CM = CN = z$ (2, 3).

6 (4). Запишем условие Чевы, обходя треугольник ABC , начиная с вершины A , по часовой стрелке: $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} = 1$. Поскольку выписанное

произведение равно единице, утверждение доказано (Т. 79). ■

В некоторых задачах основная трудность заключается в том, чтобы найти треугольник, к которому можно было бы применить теорему Чевы.

ЗАДАЧА 2

Докажите, что три прямые, проходящие через середины сторон треугольника и середины проведённых к ним высот, пересекаются в одной точке.

Решение

1. Треугольник ABC .

2. AD , BE , CF – высоты $\triangle ABC$.

3. M , N , K – середины сторон BC , AC , AB соответственно.

4. R , S , T – середины высот AD , BE , CF соответственно.

} (дано)
(Д. 48а)

5. Прямые MR , NS и KT пересекаются в одной точке (требуется доказать).

6. Это явно одна из тех задач, где полный чертёж очень громоздкий, и в нём непросто разобраться (рис. Д. 48 а).

7. Прежде всего, заметим, что отрезки KM , MN , KN – средние линии $\triangle ABC$, а значит середины высот лежат на них. Начертим упрощённый чертёж, на котором не будем изображать прямые MR , NS и KT , но изобразим средние линии (построение) (рис. Д. 48б).

8. Теперь понятно, что следует попытаться применить теорему Чевы к $\triangle KMN$ с отмеченными на его сторонах точками R , S , T . А для этого нужно найти отношения соответствующих отрезков.

9. Начнём, скажем, с нахождения отношения $\frac{KS}{SM}$. Для этого начертим ещё один чертёж, на котором не будет ничего лишнего (рис. Д. 48в).

10. Поскольку треугольник ABC гомотетичен треугольнику KBM относительно центра гомотетии B (с коэффициентом 2), то $\frac{KS}{SM} = \frac{AE}{EC}$.

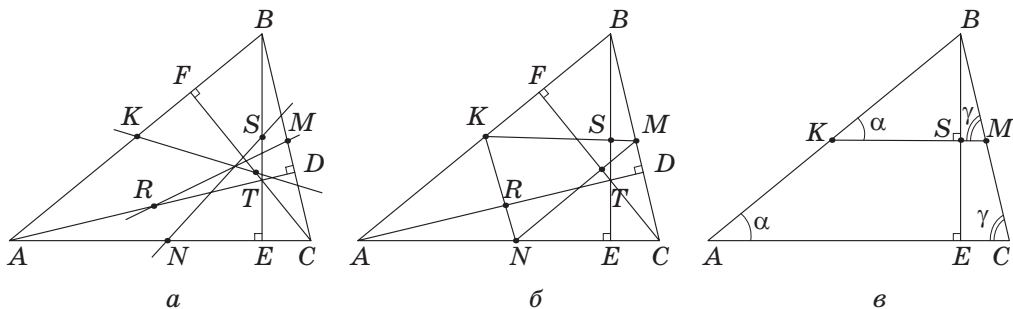


Рис. Д. 48

11. Аналогично, рассматривая треугольники MNC и AKN (рис. Д. 48б), установим, что $\frac{MT}{TN} = \frac{BF}{FA}$ и $\frac{NR}{RK} = \frac{CD}{DB}$

12. Перемножая три полученные равенства, получим:

$$\frac{KS}{SM} \cdot \frac{MT}{TN} \cdot \frac{NR}{RK} = \frac{AE}{EC} \cdot \frac{BF}{FA} \cdot \frac{CD}{DB} = \frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA}$$
 (мы поменяли местами во втором произведении два последних сомножителя).

13. Поскольку $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA}$ – произведение из условия Чевы для высот треугольника ABC при обходе его начиная с вершины A против часовой стрелки, а мы знаем, что высоты треугольника пересекаются в одной точке, то по теореме Чевы $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1$.

14 (5). Отсюда заключаем, что $\frac{KS}{SM} \cdot \frac{MT}{TN} \cdot \frac{NR}{RK} = 1$, а поскольку это условие Чевы для обхода треугольника KMN , начиная с вершины K по часовой стрелке, то утверждение доказано (Т. 79). ■

С помощью теоремы Чевы также эффективно решаются многие задачи на отношение отрезков.

ЗАДАЧА 3

На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты такие точки D и E , что $AD : DB = 4 : 3$, $BE : EC = 5 : 8$. Отрезки AE и CD пересекаются в точке F . Определить, в каком отношении прямая BF делит сторону AC .

Решение

1. Треугольник ABC .
2. Точки D и E на сторонах AB и BC .
3. $AD : DB = 4 : 3$, $BE : EC = 5 : 8$.
4. F – точка пересечения отрезков AE и CD .

} (дано) (рис. Д. 49а)

5. Проведём прямую BF (построение) (рис. Д. 49б). Пусть K – точка её пересечения со стороной AC .

6. $AK : KC$ (требуется найти).

7. Т.к. $AD : DB = 4 : 3$, то удобно обозначить $AD = 4x$, $DB = 3x$.

Т.к. $BE : EC = 5 : 8$, то удобно обозначить $BE = 5y$, $EC = 8y$.

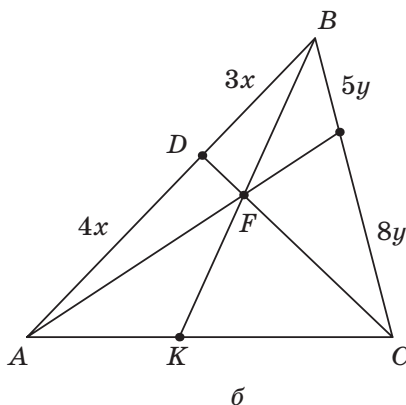
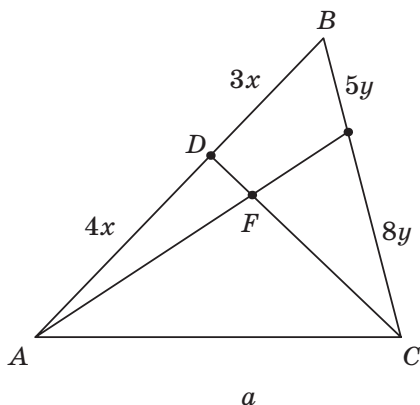


Рис. Д. 49

8. Применим к треугольнику ABC теорему Чевы. Из шести возможных форм записи условия Чевы удобно выбирать начинающееся с отношения, которое мы ищем, т.е. $\frac{AK}{KC}$. Для этого будем обходить треугольник ABC , начиная с вершины A против часовой стрелки. Получим:

$$\frac{AK}{RC} \cdot \frac{CE}{EB} \cdot \frac{BD}{DA} = 1, \text{ или } \frac{AK}{KC} \cdot \frac{8y}{5y} \cdot \frac{3x}{4x} = 1, \text{ или } \frac{AK}{KC} \cdot \frac{6}{5} = 1, \text{ откуда } \frac{AK}{KC} = \frac{5}{6}. \blacksquare$$

Д.7.3. ТЕОРЕМА МЕНЕЛАЯ

Эта теорема известна нам из сочинений древнегреческого математика Менелая Александрийского, датируемых около 100 г. н. э. Она играет важную роль не только в геометрии, но и в астрономии и геодезии.

Теорема 82 (теорема Менелая). Если на сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и K , а на продолжении стороны AC – точка N , то эти три точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$.

Замечание. По аналогии с теоремой Чевы условие равенства единице произведения трёх отношений (в нашей формулировке оно имеет вид $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$) называют *условием Менелая*. Точно так же, как и в случае теоремы Чевы, его можно записать в шести различных равносильных формах, пользуясь абсолютно аналогичными правилами.

Доказательство

Нам нужно доказать два взаимно обратных утверждения:

(А) Если точки M , K и N лежат на одной прямой, то выполняется равенство $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$.

(Б) Если выполняется равенство $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$, то точки M , K и N лежат на одной прямой.

Докажем сначала утверждение (А).

1. Треугольник ABC .
 2. Точки M и K лежат на сторонах AB и BC .
 3. Точки M , K и N лежат на одной прямой.
- } (дано)
(рис. Д. 50а)

4. $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$ (требуется доказать).

5. Опустим из вершин A , B и C перпендикуляры AP , BR и CT на прямую, проходящую через точки M , K и N (построение) (рис. Д. 50б).

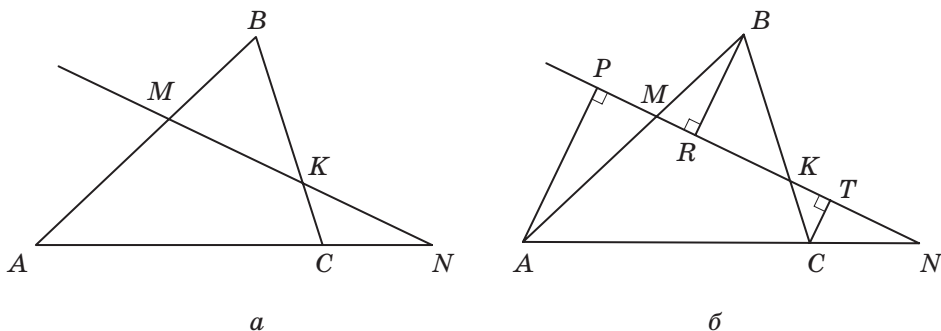


Рис. Д. 50

6. Прямоугольные треугольники AMP и BMR подобны, поскольку $\angle AMP = \angle BMR$ как вертикальные, а значит, $\frac{AM}{MB} = \frac{AP}{BR}$ (1, 2, 3, 5, свойство подобных треугольников).

7. Прямоугольные треугольники BKR и CKT подобны, поскольку $\angle BKR = \angle CKT$ как вертикальные, а значит, $\frac{BK}{KC} = \frac{BR}{CT}$ (1, 2, 3, 5, свойство подобных треугольников).

8. Прямоугольные треугольники CNT и ANP подобны, поскольку первый из них отсекается от второго прямой CT , параллельной его стороне AP . Значит, $\frac{CN}{NA} = \frac{CT}{AP}$ (свойство подобных треугольников).

9 (4). Перемножая равенства, полученные в п.п. 6, 7 и 8, будем иметь:

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{BR} \cdot \frac{BR}{CT} \cdot \frac{CT}{AP} = 1 \quad (6, 7, 8). \blacksquare$$

Теперь докажем утверждение (Б).

1. Треугольник ABC .

2. Точки M и K лежат на сторонах AB и BC , точка N лежит на продолжении стороны AC .

3. $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$.

} (дано)
(рис. Д. 51а)

4. Точки M , K и N лежат на одной прямой (требуется доказать).

5. Предположим, что доказываемое утверждение (Б) неверно, и точки M , K и N не лежат на одной прямой (предположение) (рис. Д. 51а).

6. Проведём через точки M и N прямую. Пусть эта прямая пересекает сторону BC в точке E , которая по предположению п. 5 отлична от точки K (рис. Д. 51б).

7. Согласно утверждению (А) для точек M , E и N , лежащих на одной прямой, выполняется равенство $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$ (6, А).

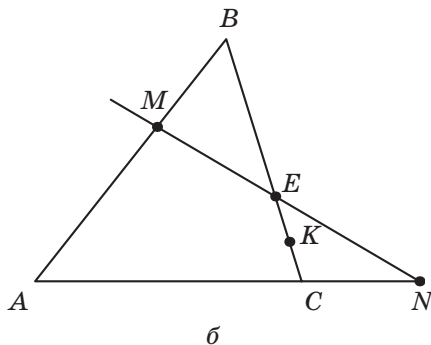
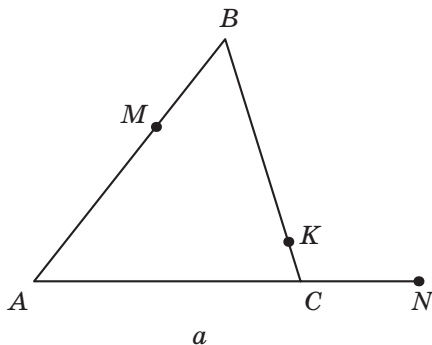


Рис. Д. 51

8. Из равенств $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$ (п. 7) и $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$ (п. 3) заключаем, что $\frac{BE}{EC} = \frac{BK}{KC}$ (3, 7).

9 (4). По теореме 61 точки E и K совпадают. Это значит, что наше предположение из п. 5 неверно, и M , K и N лежат на одной прямой (8, Т. 61). ■

Теорема Менелая полностью доказана.

У теоремы Менелая имеются обобщения, похожие на обобщения теоремы Чевы. Теорема Менелая останется верной, если все три точки M , K и N выбрать на продолжениях сторон треугольника.

Теорема 83 (обобщённая теорема Менелая). Если на продолжениях сторон AB , BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M , K и N , то эти три точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Имеется также теорема Менелая в форме синусов. Она будет предложена как одна из задач.

Д.7.4. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ МЕНЕЛАЯ

С помощью теоремы Менелая удобно решаются прежде всего задачи на отношение отрезков. Рассмотрим одну из таких задач.

ЗАДАЧА 4

На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты такие точки D и E , что $AD : DB = 2 : 3$, $BE : EC = 4 : 7$. Отрезки AE и CD пересекаются в точке F . Определить, в каком отношении точка F делит отрезок AE .

Решение

- | | | |
|--|---|---------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Треугольник ABC. 2. Точки D и E на сторонах AB и BC. 3. $AD : DB = 2 : 3$, $BE : EC = 4 : 7$. 4. F – точка пересечения отрезков AE и CD. 5. $AF : FE$ (требуется найти). | } | (дано) (рис. Д .52) |
|--|---|---------------------|

6. Т.к. $AD : DB = 2 : 3$, то удобно обозначить $AD = 2x$, $DB = 3x$.

Т.к. $BE : EC = 4 : 7$, то удобно обозначить $BE = 4y$, $EC = 7y$.

7. Поищем треугольник со стороной AE . Таких треугольников есть два: AEB и AEC (рис. Д .52). Но только для треугольника AEB имеется прямая, пересекающая две стороны и продолжение третьей, – прямая DC .

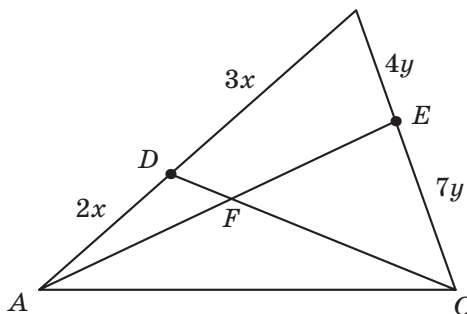


Рис. Д. 52

8. Применим к треугольнику AEB и прямой DC теорему Менелая. Из шести возможных форм записи условия Менелая удобно выбирать начинающееся с отношения, которое мы ищем,

т.е. $\frac{AF}{FE}$. Для этого будем обходить

треугольник AEB , начиная с вершины A против часовой стрелки. Получим:

$$\frac{AF}{FE} \cdot \frac{EC}{CB} \cdot \frac{BD}{DA} = 1, \text{ или } \frac{AF}{FE} \cdot \frac{7y}{11y} \cdot \frac{3x}{2x} = 1,$$

$$\text{или } \frac{AF}{FE} \cdot \frac{21}{22} = 1, \text{ откуда } \frac{AF}{FE} = \frac{22}{21}. \blacksquare$$

С помощью теоремы Менелая часто устанавливается принадлежность тройки точек одной прямой.

ЗАДАЧА 5

Докажите, что касательные к описанной около треугольника окружности, проведённые в его вершинах, пересекают продолжения противоположных сторон в точках, лежащих на одной прямой.

Решение

1. Треугольник ABC .

2. ω – окружность, описанная около $\triangle ABC$.

3. M, N, K – точки пересечения касательных к окружности ω в точках A, B, C с прямыми BC, AC, AB соответственно. } (дано) (рис. Д. 53)

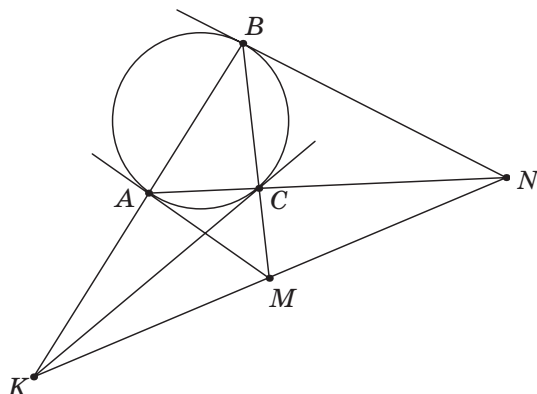


Рис. Д. 53

4. Точки M, N и K лежат на одной прямой (требуется доказать).

5. Треугольники ABN и BCN подобны, т.к. угол ANB у них общий, а $\angle BAN = \angle CBN$, поскольку каждый из них измеряется половиной дуги BC : первый как вписанный, опирающийся на эту дугу, а второй – угол между хордой полукасательной, внутри которого лежит дуга BC . Отсюда

$$\text{заключаем, что } \frac{AN}{NC} = \frac{AB}{BC}.$$

6. Аналогично устанавливаем, что $\triangle ACM \sim \triangle BAM$, откуда $\frac{CM}{MB} = \frac{AC}{AB}$, и $\triangle BKC \sim \triangle ACK$, откуда $\frac{BK}{KA} = \frac{BC}{AC}$.

7. Перемножая три полученных равенства, получим:

$$\frac{AN}{NC} \cdot \frac{CM}{MB} \cdot \frac{BK}{KA} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{BC}{AC} = 1.$$

8. Мы видим, что на продолжениях сторон AC , BC и AB $\triangle ABC$ расположены соответственно точки N , M и K , для которых выполняется соотношение $\frac{AN}{NC} \cdot \frac{CM}{MB} \cdot \frac{BK}{KA} = 1$. Поскольку это соотношение Менелая (при обходе $\triangle ABC$, начиная с вершины A против часовой стрелки), то по теореме 83 (обобщённой теореме Менелая) заключаем, что эти точки лежат на одной прямой. ■

§ Д.8



ЭЛЛИПС, ГИПЕРБОЛА И ПАРАБОЛА

Ещё на уроках алгебры в 8–9-м классах вы познакомились с параболой как графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ и гиперболой как графиком функции $y = \frac{k}{x}$. В главах 5 и 6 настоящего учебника встречается эллипс, определяемый как фигура, полученная в результате растяжения или сжатия окружности вдоль одного из диаметров. В данном параграфе мы рассмотрим эллипс, гиперболу и параболу как геометрические места точек на плоскости, удовлетворяющих каждому своему определённому условию. В за-

ключение параграфа мы увидим, что все три изученные кривые можно трактовать как частные случаи одного и того же геометрического места точек, удовлетворяющих уже единому для всех трём условию.

Эллипс, гиперболу и параболу открыл древнегреческий математик Мекхем около 360 г. до н. э.; описания этих исследований дошли до нас в замечательных сочинениях выдающегося древнегреческого математика Аполлония, написанных примерно 200 лет спустя.

Д.8.1. ЭЛЛИПС

Рассмотрим на плоскости две точки F_1 и F_2 и найдём геометрическое место точек (по-другому, множество точек), сумма расстояний от которых до этих двух точек есть величина постоянная.

Традиционно данные две точки F_1 и F_2 называются *фокусами*, расстояние между ними обозначается через $2c$ (так делается потому, что более важную роль в дальнейшем будет играть не само это расстояние, а его половина), а постоянная сумма расстояний от искомых точек до фокусов обозначается через $2a$ (по той же причине). В этих обозначениях условие, задающее искомое множество точек, записывается в виде: $F_1M + F_2M = 2a$.

Понятно, что при $a < c$ искомое множество пусто, т.к. по аксиоме расстояния $2c = F_1F_2 \leq F_1M + F_2M = 2a$.

При $a = c$ условие, задающее искомое множество точек, может быть переписано в виде: $F_1F_2 = F_1M + F_2M$. По аксиоме расстояния этому условию удовлетворяют лишь точки M , лежащие на отрезке F_1F_2 . Это значит, что искомым множеством в данном случае является отрезок F_1F_2 .

Наконец, при $a > c$ мы дадим такое определение.

Определение 68. *Эллипс* – это множество (геометрическое место) точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная, большая расстояния между фокусами.

Выведем уравнение эллипса в декартовой прямоугольной системе координат. Расположим фокусы на оси Ox так, чтобы середина соединяющего их отрезка совпала с началом координат O . Т.к. $F_1F_2 = 2c$, то координаты фокусов будут $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$.

1. Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка эллипса. Условие $F_1M + F_2M = 2a$ в координатах запишется в виде:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

2. Перенесём один из радикалов в правую часть, после чего возведём обе части равенства (они положительные) в квадрат:

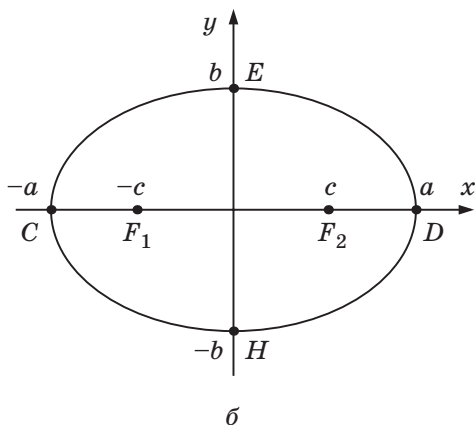
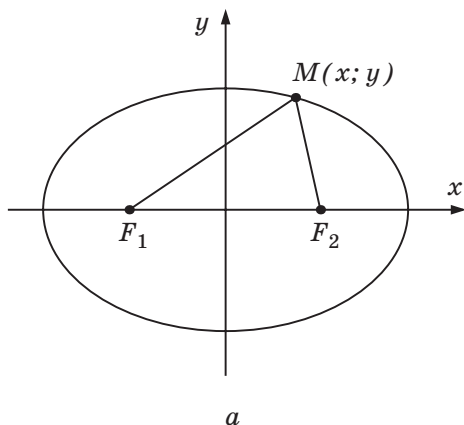


Рис. Д. 54

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right)^2$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 .$$

3. Перенесём радикал в левую часть равенства, а всё остальное в правую, приведём подобные и разделим обе части равенства на 4. Получим:

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx .$$

4. Опять возведём обе части равенства в квадрат (убедитесь самостоятельно, что они положительны, и тем самым наше преобразование равносильное):

$$a^2 \left((x-c)^2 + y^2 \right) = a^4 - 2a^2 cx + c^2 x^2 ;$$

5. Приведя подобные, получим (проверьте!):

$$\left(a^2 - c^2 \right) x^2 + a^2 y^2 = a^2 \left(a^2 - c^2 \right) .$$

6. Т.к. $a > c$, то величина $a^2 - c^2$ положительна. Обозначим её через b^2 .

7. После замены $b^2 = a^2 - c^2$ последнее равенство переписется в виде:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 .$$

8. Разделив обе части на $a^2 b^2$, получим уравнение эллипса в виде, который называется каноническим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 . \blacksquare$$

Из этого уравнения можно легко найти точки пересечения эллипса с координатными осями. Они называются *вершинами эллипса*. Координаты вершин такие: $C(-a; 0)$, $D(a; 0)$, $E(0; b)$, $H(0; -b)$ (рис. Д. 54).

Отрезки $CD = 2a$ и $EH = 2b$ называются соответственно *большой осью* и *малой осью* эллипса (т.к. $b^2 = a^2 - c^2$, то всегда $a > b$). Каждый из отрезков $OC = a$ и $OD = a$ называется *большой полуосью* эллипса. Этим же словом называется величина a . Аналогично каждый из отрезков $OE = b$ и $OH = b$, а также сама величина b называется *малой полуосью* эллипса. Отрезки MF_1 и MF_2 , соединяющие произвольную точку M эллипса с его фокусами, называются *фокальными радиусами* этой точки.

Докажем несколько теорем, относящихся к эллипсу.

Теорема 84. При растяжении или сжатии окружности вдоль одного из диаметров получится эллипс.

Доказательство

1. Возьмём окружность радиуса R с центром в начале координат. Она задаётся уравнением $x^2 + y^2 = R^2$.

2. Выполним растяжение этой окружности вдоль оси Ox (от оси Oy) в k раз (где $k > 1$).

3. При таком растяжении точка P окружности с координатами $P(x_1; y_1)$ перейдёт в некоторую точку M с координатами $M(kx_1; y_1)$.

4. Обозначим через x и y координаты точки M , т.е. у нас будет $x = kx_1$, $y = y_1$, и выясним, какому уравнению они удовлетворяют.

5. Поскольку точка $P(x_1; y_1)$ лежит на окружности, то $x_1^2 + y_1^2 = R^2$.

6. Подставляя в предыдущее уравнение $x_1 = \frac{x}{k}$; $y_1 = y$, получим:

$$\left(\frac{x}{k}\right)^2 + y^2 = R^2.$$

7. Деля обе части этого равенства на R^2 , приходим к уравнению

$$\frac{x^2}{(kR)^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1.$$

8. Это каноническое уравнение эллипса с большой полуосью kR и малой полуосью R . ■

Рассмотрим теперь касательные к эллипсу. Их определение может быть дано полностью аналогично определению касательных к окружности.

Определение 69. Касательной к эллипсу называется прямая, имеющая с эллипсом единственную общую точку.

Мы докажем для касательной к эллипсу две теоремы. В первой из них речь будет идти об уравнении касательной к эллипсу, заданному своим каноническим уравнением.

Теорема 85. Если $M(x_0; y_0)$ – произвольная точка эллипса, заданного каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то касательной к эллипсу в точке M является прямая, задаваемая уравнением $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Доказательство

1. Эллипс, заданный каноническим

уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2. Точка M , принадлежащая эллипсу.

} (дано)

3. Прямая, задаваемая уравнением $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$, является касательной к эллипсу (требуется доказать).

4. Теорема будет доказана, если мы установим, что система уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \\ \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение $(x_0; y_0)$.

5. Тот факт, что $(x_0; y_0)$ является решением системы легко проверяется непосредственно – ведь из того, что точка $(x_0; y_0)$ принадлежит эллипсу, сле-

дует, что $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ (1, 2, 4).

6 (3). Складывая равенства $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ и вычитая их этой

суммы удвоенное равенство $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$, получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{2xx_0}{a^2} - \frac{2yy_0}{b^2} = 0,$$

или после преобразований $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 0$. Это равенство возможно

лишь при $x = x_0; y = y_0$, т.е. других решений, кроме $(x_0; y_0)$, система не

имеет. ■

Вторая теорема о касательной к эллипсу даёт простое геометрическое условие, позволяющее легко строить касательную в любой точке эллипса.

Теорема 86. Если M – произвольная точка эллипса, не являющаяся концом его большой оси, то касательной к эллипсу в точке M является прямая содержащая биссектрису угла, смежного с углом F_1MF_2 , где F_1 и F_2 – фокусы эллипса.

Доказательство

1. Эллипс с фокусами F_1 и F_2 .
2. Точка M , принадлежащая эллипсу.
3. MT – биссектриса угла, смежного с $\angle F_1MF_2$.
4. Прямая MT – касательная к эллипсу (требуется доказать).
5. Отложим на продолжении фокального радиуса F_1M за точку M отрезок $MK = MF_2$ (построение) (рис. Д. 55б).

} (дано) (рис. Д. 55а)

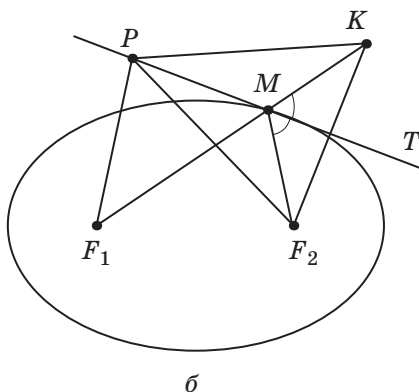
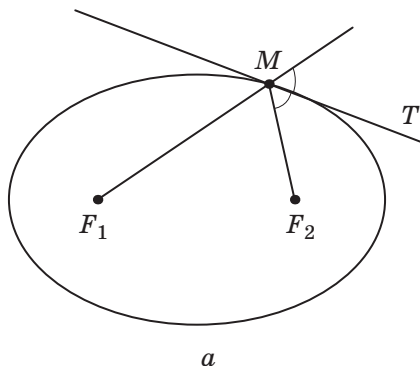


Рис. Д. 55

6. Заметим (это понадобится далее), что $F_1K = F_1M + MK = F_1M + F_2M = 2c$ (5, определение эллипса).

7. Поскольку треугольник KMF_2 – равнобедренный с основанием KF_2 , а прямая MT содержит биссектрису его угла при вершине M , то она содержит также медиану и высоту, а значит, прямая MT является серединным перпендикуляром к отрезку KF_2 .

8. Возьмём на прямой любую точку P , отличную от M , и докажем, что она не принадлежит эллипсу (рис. Д. 55). Действительно, поскольку $F_2P = PK$, то $F_1P + F_2P = F_1P + PK > F_1K$ (7, неравенство треугольника). А поскольку $F_1K = 2c$ (6), то $F_1P + F_2P > 2c$. А это значит, что точка P не принадлежит эллипсу.

9 (4). Доказано, что на прямой MT лишь единственная точка M принадлежит эллипсу. Это и значит, что прямая MT – касательная к эллипсу. ■

Из теоремы может быть легко выведено уже упоминавшееся в параграфе 5.2 *оптическое свойство эллипса*: луч, выходящий из одного его фокуса, после отражения от эллипса попадает во второй его фокус. Точный смысл этого утверждения такой: *фокальные радиусы, проведённые в любую точку эллипса, образуют равные углы с касательной, проведённой к эллипсу в этой точке*. Поскольку для светового луча угол падения равен углу отражения, то это и значит, что луч, вышедший из одного фокуса, пройдёт через другой фокус.

Доказательство

1. Пусть KL – касательная к эллипсу в точке M , а F_1M и F_2M – фокальные радиусы (рис Д. 56а).

2. Требуется доказать, что $\angle F_1MK = \angle F_2ML$.

3. Продолжим фокальный радиус F_1M за точку M (построение) (рис. Д. 56б).

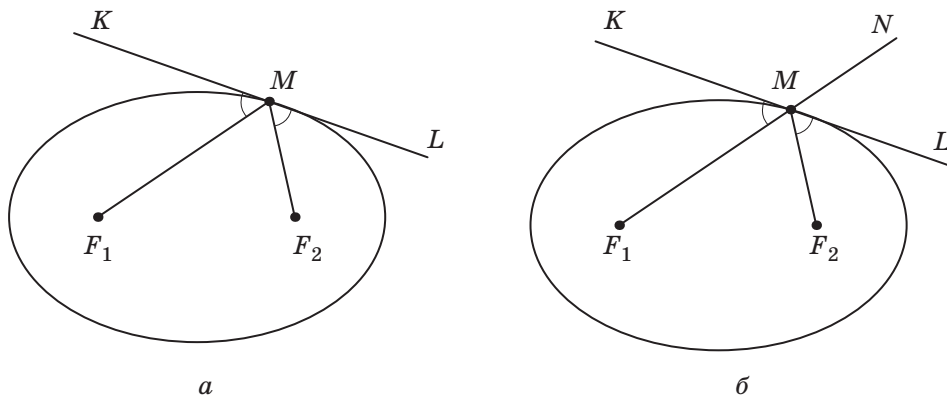


Рис. Д. 56

4. Каждый из углов F_1MK и F_2ML равен углу NML – первый как вертикальный, а второй из-за того, что ML – биссектриса угла F_2MN . ■

Д.8.2. ГИПЕРБОЛА

Рассмотрим на плоскости две точки F_1 и F_2 и найдём геометрическое место точек, разность расстояний от которых до этих двух точек есть величина постоянная.

Так же, как и ранее, данные две точки F_1 и F_2 назовём *фокусами*, расстояние между ними обозначим через $2c$, а постоянную разность расстояний от искомых точек до фокусов обозначим через $2a$. В этих обозначениях условие, задающее искомое множество точек, записывается в виде: $|F_1M - F_2M| = 2a$.

При $a > c$ искомое множество пусто, т.к. по аксиоме расстояния $2a = |F_1M - F_2M| \leq F_1F_2 = 2c$.

При $a = c$ условие, задающее искомое множество точек, может быть переписано в либо в виде: $F_1F_2 = F_1M - F_2M$, либо в виде $F_1F_2 = F_2M - F_1M$.

Первое из выписанных равенств перепишем как $F_1F_2 + F_2M = F_1M$. По аксиоме расстояния этому условию удовлетворяют лишь такие точки M , что точка F_2 лежит на отрезке F_1M . Это множество представляет собой луч прямой F_1F_2 с началом в точке F_2 , не содержащий точку F_1 (правый луч на рис. Д. 57).



Рис. Д. 57

Рассуждая аналогично, получим, что множество точек, удовлетворяющих условию $F_1F_2 = F_2M - F_1M$, представляет собой луч прямой F_1F_2 с началом в точке F_1 , не содержащий точку F_2 (левый луч на рис. Д. 57).

Таким образом, при $a = c$ искомым множеством является объединение указанных двух лучей прямой F_1F_2 (рис. Д. 57).

Наконец, при $a < c$ мы дадим такое определение.

Определение 70. *Гипербола* – это множество (геометрическое место) точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.

Вывод уравнения гиперболы в декартовой прямоугольной системе координат почти аналогичен выводу уравнения эллипса.

1. Расположим фокусы на оси Ox так, чтобы середина соединяющего их отрезка совпала с началом координат O .

2. Т.к. $F_1F_2 = 2c$, то координаты фокусов будут $F_1 (-c; 0)$, $F_2 (c; 0)$ (рис. Д. 58а).

3. Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка гиперболы. Условие $|F_1M - F_2M| = 2a$ в координатах запишется в виде:

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a .$$

4. Выполняя преобразования, как в случае эллипса, придём к каноническому уравнению гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $b^2 = c^2 - a^2$. ■

Гипербола изображена на рис. Д. 58б. Она состоит из двух частей, симметричных друг другу и относительно оси Oy , и относительно начала координат, и называемых *ветвями гиперболы*. Две прямые, к которым неограниченно приближаются ветви гиперболы при неограниченном удалении точки

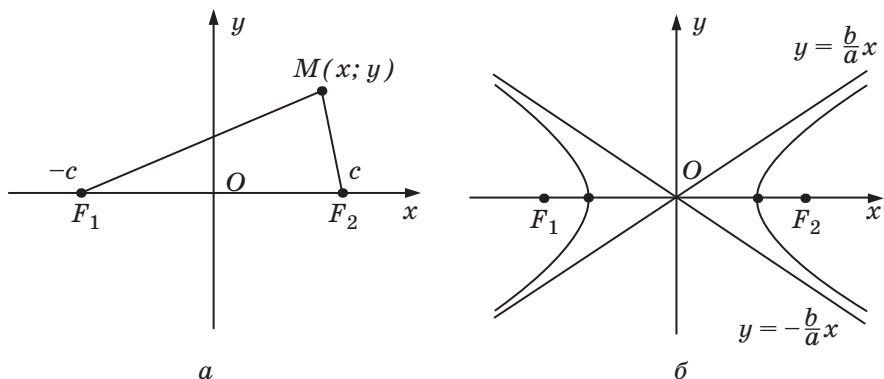


Рис. Д. 58

на гиперболе от начала координат, называются *асимптотами*. Они задаются уравнениями $y = \pm \frac{b}{a}x$. Точки пересечения гиперболы с осью Ox называются *вершинами гиперболы*. Они имеют координаты $(-a; 0)$, $(a; 0)$.

Многие свойства гиперболы похожи на свойства эллипса – иногда буквально, иногда с отличиями, обусловленными спецификой этих кривых. Ниже мы дадим необходимые формулировки, предоставляя доказательства для самостоятельной работы учащихся.

Определение 71. *Касательной к гиперболе* называется прямая, не параллельная её асимптоте и имеющая с гиперболой единственную общую точку.

Для касательной к гиперболе рассмотрим две теоремы – аналоги соответствующих теорем для касательной к эллипсу. В первой из них речь будет идти об уравнении касательной к гиперболе, заданной своим каноническим уравнением. Она абсолютно аналогична соответствующей теореме для эллипса (с естественной заменой знака «+» на знак «-»).

Теорема 87. Если $M(x_0; y_0)$ – произвольная точка гиперболы, заданной каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, то касательной к гиперболе в точке M является прямая, задаваемая уравнением $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Доказательство этой теоремы попробуйте получить самостоятельно.

Вторая теорема о касательной к гиперболе тоже связана с биссектрисой некоторого угла, но не совсем такого, как у эллипса.

Теорема 88. Если M – произвольная точка гиперболы, не являющаяся её вершиной, то касательной к гиперболе в точке M является прямая содержащая биссектрису угла между фокальными радиусами точки M (т.е. $\angle F_1MF_2$, где F_1 и F_2 – фокусы гиперболы).

Теорема проиллюстрирована на рис. Д. 59а. Докажите эту теорему самостоятельно, проведя рассуждение, аналогичное рассуждению при доказательстве теоремы 86.

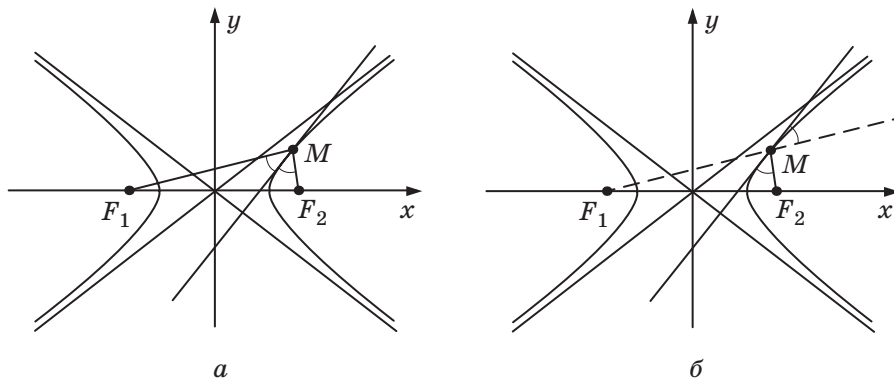


Рис. Д. 59

Наконец, оптическое свойство гиперболы заключается в том, что луч, выходящий из одного её фокуса, после отражения от гиперболы пойдёт так, как будто бы он вышел из другого фокуса (рис. Д. 59б). Оно легко выводится из теоремы 88.

Д.8.3. ПАРАБОЛА

Рассмотрим на плоскости произвольную прямую и произвольную точку, не лежащую на этой прямой, и найдём геометрическое место точек, равноудалённых от точки и прямой.

Определение 72. *Парабола* – это множество (геометрическое место) точек плоскости, равноудалённых от данной прямой (называемой *директрисой*) и от не лежащей на ней точки (называемой *фокусом*).

Выведем уравнение параболы в декартовой прямоугольной системе координат.

1. Расположим фокус F на оси Oy так, чтобы он имел координаты $F(0; m)$, а директрису расположим параллельно оси Ox так, чтобы она задавалась уравнением $y = -m$ (рис. Д. 60а).

2. Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка параболы. Опустим перпендикуляр MP из точки M на директрису (рис. Д.60 б).

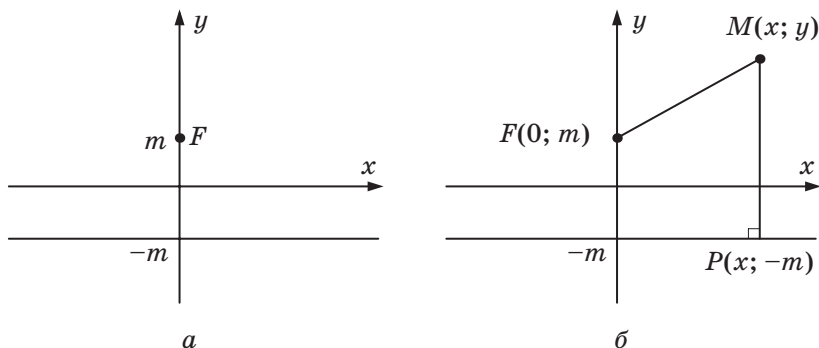


Рис. Д. 60

3. Абсцисса у точки P такая же, как у точки M , а её ордината равна $-m$. Таким образом $P(x; -m)$.

4. Условие $FM = MP$ в координатах запишется в виде:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-m)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+m)^2}.$$

5. Возведём обе части равенства (они положительные) в квадрат. Получим:

$$x^2 + y^2 - 2ym + m^2 = y^2 + 2ym + m^2,$$

или после приведения подобных, $x^2 = 4my$. Такой вид уравнения параболы называется *каноническим*.

6. Если привычно выразить y через x , то получим уравнение параболы в виде $y = \frac{x^2}{4m}$. ■

Обозначив $\frac{1}{4m} = a$, выведенное уравнение можно переписать в совсем знакомом виде $y = ax^2$. Именно так мы записывали уравнение параболы в курсе алгебры 9-го класса.

Теперь мы можем сказать, что фокус параболы $y = ax^2$ находится в точке $F\left(0; \frac{1}{4a}\right)$, а её директриса задаётся уравнением $y = -\frac{1}{4a}$.

Вы знаете, что у параболы имеется ось (её ось симметрии). Можно сказать так: прямая, проходящая через фокус параболы перпендикулярно её директрисе, называется *осью параболы*. Точка пересечения параболы с её осью называется *вершиной параболы*. Так же, как для эллипса и гиперболы, отрез-

зок, соединяющий точку на параболе с её фокусом, называется *фокальным радиусом* этой точки.

Сейчас мы выполним для параболы программу, аналогичную той, которая была выше выполнена для эллипса и гиперболы: дадим определение касательной к параболе, сформулируем две теоремы о касательной и рассмотрим оптическое свойство параболы.

Определение 73. Касательной к параболе называется прямая, не параллельная её оси и имеющая с параболой единственную общую точку.

Начнём с теоремы об уравнении касательной к параболе, заданной своим уравнением. При этом мы будем записывать уравнение параболы не в каноническом виде, а в более привычном для нас виде $y = ax^2$.

Теорема 89. Если $M(x_0; y_0)$ – произвольная точка параболы $y = ax^2$, то касательной к параболе в точке M является прямая, задаваемая уравнением $y + y_0 = 2axx_0$

Доказательство этой теоремы попробуйте получить самостоятельно, доказав, что система уравнений $y = ax^2$; $y + y_0 = 2axx_0$; $y_0 = ax_0^2$ имеет единственное решение $x = x_0$; $y = y_0$.

Вторая теорема о касательной к параболе, так же, как соответственные теоремы для эллипса и гиперболы тоже связана с биссектрисой некоторого угла.

Теорема 90. Если M – произвольная точка параболы, не являющаяся её вершиной, то касательной к параболе в точке M является прямая содержащая биссектрису угла между фокальным радиусом точки M и перпендикуляром, опущенным из точки M на директрису.

Теорема 90 проиллюстрирована на рис. Д. 61а. Докажите её самостоятельно, проведя рассуждение, аналогичное рассуждению при доказательстве теоремы 88.

Наконец, оптическое свойство параболы заключается в том, что луч, выходящий из её фокуса, после отражения от параболы пойдёт параллельно её оси (рис. Д. 61б). Оно легко выводится из теоремы 90.

На оптическом свойстве параболы основан принцип работы мощных прожекторов, имеющих параболическую форму, телескопов, а также параболических антенн («тарелок»).

В заключение параграфа отметим, что эллипс, гипербола и парабола рассматривались нами как геометрические места точек, заданные различными условиями (хотя и относительно похожими). Оказывается, связь между этими кривыми гораздо более глубокая. Все они являются частными случаями одного и того же геометрического места точек.

Рассмотрим на плоскости произвольную прямую (директрису) и произвольную точку (фокус), не лежащую на этой прямой. Поставим задачу найти

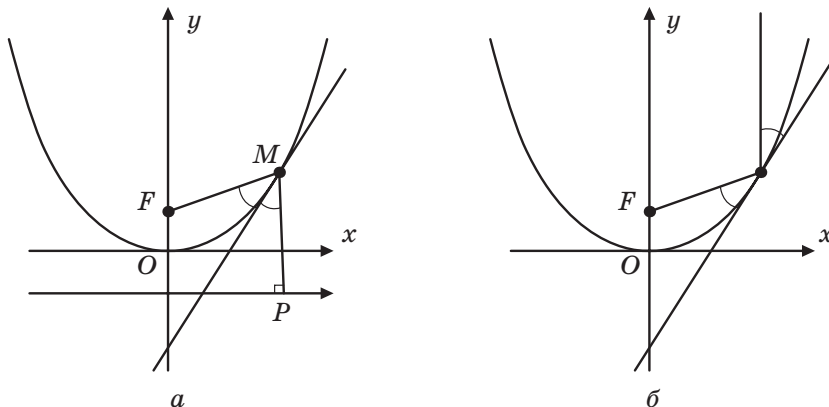


Рис. Д. 61

геометрическое место (множество) точек, для которых отношение расстояний до фокуса и до директрисы есть постоянная величина, традиционно обозначаемая греческой буквой ε (эпсилон).

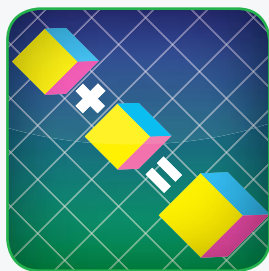
Понятно, что при $\varepsilon = 1$ получим параболу. Оказывается, что при $\varepsilon < 1$ искомым множеством будет эллипс, а при $\varepsilon > 1$ – гипербола. При этом в процессе решения задачи обнаружится, что у эллипса и гиперболы есть ещё второй фокус и вторая директриса.

Кстати, именно таким взглядом на эллипс, гиперболу и параболу объясняются их названия (пришедшие из древнегреческого языка). Слово «эллипс» в переводе значит «недостаток», а «гипербола» – «избыток». Понятно, что здесь имеется в виду, что у эллипса расстояние до фокуса «недостаточное», меньшее, чем до директрисы, а у гиперболы – «избыточное», большее. Что касается названия параболы, то в переводе значения этого слова «сопоставление», «подобие»; расстояния сопоставимы друг с другом, подобны друг другу (в смысле «равны»).

В курсе геометрии 11-го класса вы также узнаете, что эллипс, гипербола и парабола могут быть получены в результате сечения плоскостями прямого кругового конуса – геометрической фигуры, с которой вы познакомились ещё в курсе геометрии 7-го класса. По этой причине часто используется общее названия этих кривых – *конические сечения*, или кратко, *коники*.

Наконец, вы наверняка обратили внимание, что все эти кривые задаются каноническими уравнениями второй степени. Можно доказать, что любое уравнение второй степени от двух переменных задаёт либо гиперболу, либо параболу, либо эллипс (частный случай, окружность) – если оно задаёт кривую*. Поэтому эти кривые ещё называют *кривыми второго порядка*.

* Некоторые уравнения второй степени могут задавать пустое множество, точку, прямую либо пару прямых – параллельных или пересекающихся.



НЕРАЗРЕШИМОСТЬ КЛАССИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

Со времён Евклида задачи на геометрические построения понимались как задачи на построение циркулем и линейкой. При этом имелась в виду линейка без делений, причём предполагалось не только, что на линейке первоначально отсутствуют деления, но что их нельзя наносить в процессе построения, скажем, делая на ней отметки или засечки. Другими словами, линейка понималась как чертёжный инструмент, позволяющий провести прямую – либо произвольную, либо проходящую через данную точку, либо проходящую через две данные точки. Мы тоже именно так решали задачи на построения в нашем курсе геометрии – как в учебнике для 7–9-го классов, так и в данном учебнике для 10-го класса.

Среди задач на построение, поставленных древнегреческими математиками, решения трёх никак не удавалось получить, несмотря на то, что ими занимались практически все без исключения величайшие математики Древней Греции. Впоследствии этими задачами упорно занимались также многие другие математики – разных времён и народов, и тоже безуспешно. Эти три задачи, каждая из которых имеет своё индивидуальное название, получили также общее название «три классические задачи на построение».

Вот их условия.

Удвоение куба. Дано ребро куба. Требуется построить ребро куба, объём которого в 2 раза больше объёма данного куба.

Трисекция угла. Дан угол. Требуется разделить его на три равные части.

Квадратура круга. Дан радиус круга. Требуется построить сторону квадрата, равновеликого данному кругу.

Надо заметить, что в процессе поиска решения классических задач, было найдено много их решений с использованием других чертёжных инструментов, кроме циркуля и линейки. Поскольку использование циркуля и линейки можно по-другому трактовать как возможность строить прямые и окружности, то использование других инструментов можно трактовать как возможность строить другие линии.

Например, задачу о трисекции угла можно решить с помощью уже известных вам конических сечений или спирали Архимеда. Задачи о трисекции угла и о квадратуре круга можно решить с помощью кривой *квадратиссы*. Некоторые древнегреческие математики даже придумали специальные кривые (называемые сейчас их именами) для решения классических задач. Скажем, с помощью кривой *конхоиды* Никомед решил задачу о трисекции угла и удвоении куба, а Диокл решил задачу удвоения куба с помощью *циссоиды*.

Более того, принято считать, что древнегреческий математик Менехм открыл конические сечения в то время, когда пытался решить задачу об удвоении куба. Затем он использовал их также при решении задачи о трисекции угла.

Но никому не удавалось решить классические задачи в первоначальной постановке – с помощью циркуля и линейки. Они стали восприниматься как чрезвычайно сложные, превышающие человеческие возможности. В языке даже возникло идиоматическое выражение «квадратура круга», обозначающее безнадежно трудное, бессмысленное или тщетное предприятие.

Длительные безуспешные попытки решения классических задач на построение стали постепенно подводить многих математиков к гипотезе о том, что они *неразрешимы*, т.е. требуемые в них построения невозможно выполнить циркулем и линейкой.

Уже Гаусс заявлял, что проблемы удвоения куба и трисекции угла не могут быть решены с помощью циркуля и линейки, но он не привёл никаких доказательств этому. Полное доказательство было получено французским математиком Пьером Ванцелем (1814–1848) в работе, опубликованной в 1837 г.

Невозможность квадратуры круга стала простым следствием доказанного в 1882 г. немецким математиком Фердинандом фон Линдеманом (1852–1939) факта, что число π не является корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами.*

Математические рассуждения, которые привели к полному и строгому доказательству невозможности решения классических задач на построение при помощи циркуля и линейки, основываются на следующих соображениях. Как уже отмечалось, с помощью циркуля и линейки можно строить окружности и прямые, и тем самым находить точки пересечения двух прямых, двух окружностей, прямой и окружности. Основываясь на этом, можно доказать, что если имеется несколько отрезков, то с помощью циркуля и линейки можно построить только отрезки, длины которых выражаются через длины данных отрезков только с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня.

* Такие числа называются *неалгебраическими* (или *трансцендентными*).

В задаче об удвоении куба нам дан отрезок длины a , и требуется построить отрезок такой длины x , что $x^3 = 2a^3$, т.е. $x = \sqrt[3]{2}a$. Можно доказать, что содержащийся в этом выражении $\sqrt[3]{2}$ не является рациональным числом и его невозможно выразить через квадратичные радикалы. Таким образом, задача удвоения куба неразрешима с помощью циркуля и линейки.

В задаче о трисекции угла нам дан угол величиной α , и требуется построить угол величиной $\frac{\alpha}{3}$. Понятно, что имея угол данной величины, скажем, β ,

отложив на одной из его сторон единичный отрезок и проведя перпендикуляр к другой стороне, мы получим на ней отрезок длины $\cos \beta$. Верно также и обратное утверждение: имея единичный отрезок и отрезок длины $\cos \beta$, мы сможем построить угол величиной β . Таким образом, задача трисекции угла сводится к тому, чтобы имея единичный отрезок и отрезок длиной $\cos \alpha$, построить

с помощью циркуля и линейки отрезок длиной $\cos \frac{\alpha}{3}$. Применяя формулу косинуса тройного угла, получим, что $\cos \alpha = 4 \cos^3 \frac{\alpha}{3} - 3 \cos \frac{\alpha}{3}$. Таким образом, число $x = \cos \frac{\alpha}{3}$ является корнем кубического уравнения $4x^3 - 3x - \cos \alpha = 0$.

Разумеется, при некоторых значениях α это уравнение имеет рациональные корни, скажем, при $\alpha = 90^\circ$. Это значит, что прямой угол можно разделить на три равные части, т.е. можно построить угол величиной 30° . Но в общем виде это уравнение может не иметь ни рациональных корней, ни корней, выражающихся через квадратичные радикалы. Например, можно показать, что такая ситуация будет при $\alpha = 60^\circ$. Это значит, что угол величиной 60° нельзя разделить на три равные части, т.е. нельзя построить угол величиной 20° .

Наконец, в задаче о квадратуре круга, если нам дан радиус окружности – отрезок длиной R , то нужно построить отрезок такой длины x , чтобы $x^2 = \pi R^2$, т.е. $x = \sqrt{\pi}R$. Взяв для простоты $R = 1$, мы приходим к необходимости построить отрезок длиной $\sqrt{\pi}$. Можно показать, что если мы можем построить отрезок длиной π , то мы можем построить отрезок длиной $\sqrt{\pi}$, и наоборот. Но поскольку на основании упомянутого выше результата, полученного Линдеманом, число π не является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то построить отрезок длиной π циркулем и линейкой невозможно.

РАЗВИВАЕМ УМЕНИЯ

В условиях задач без дополнительных объяснений используются следующие обозначения:

A, B, C – углы треугольника ABC ,

a, b и c – длины сторон, противоположных углам A, B и C ,

$p = \frac{a+b+c}{2}$ – полупериметр, S – площадь треугольника ABC ,

R и r – радиусы соответственно описанной и вписанной окружностей,

r_a, r_b, r_c – радиусы внеписанных окружностей, касающихся сторон a, b, c соответственно,

h_a, h_b, h_c – длины высот, проведённых к сторонам a, b, c соответственно,

m_a, m_b, m_c – длины медиан, проведённых к сторонам a, b, c соответственно,

l_a, l_b, l_c – длины биссектрис, проведённых к сторонам a, b, c соответственно,

ЗАДАЧИ К § Д. 1

П

- 1 В треугольнике со сторонами 6; 7 и 8 проведена биссектриса к стороне длиной 7. На какие отрезки она делит эту сторону?
- 2 В прямоугольном треугольнике с острым углом 20° найдите угол между биссектрисой и высотой, проведёнными из вершины прямого угла.
- 3 В прямоугольном треугольнике с острым углом 20° найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла.
- 4 Докажите, что в прямоугольном треугольнике биссектриса, проведённая из вершины прямого угла, проходит между медианой и высотой, проведёнными из той же вершины, и является биссектрисой образованного ими угла.
- 5 Медиана AM треугольника ABC равна половине стороны BC . Один из углов, образованных при пересечении стороны BC с биссектрисой AK , равен 55° . Найдите углы треугольника ABC .
- 6 На стороне BC треугольнике ABC взята такая точка M , что $BM \cdot AC = CM \cdot AB$. Найдите $\angle BAM$, если $\angle CAM = 30^\circ$.
- 7 Докажите, что биссектрисы внутреннего и внешнего углов при обдной и той же вершине треугольника взаимно перпендикулярны.
- 8 Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника делит боковую сторону на отрезки, длины которых равны 4 и 5. Найдите основание треугольника.

- 9** Стороны треугольника имеют длины a , b и c . Определите, в каком отношении делится каждая из биссектрис точкой их пересечения.
- 10** Докажите, что если K – точка пересечения биссектрис треугольника ABC , то $\angle AKC = 90^\circ + \frac{\angle B}{2}$.
- 11** На стороне AC треугольника ABC взята такая точка M , что $\angle ABM = 120^\circ$, а $\angle CBM = 30^\circ$. Найдите AB , если $MA = a$, $MB = b$, $MC = c$.
- 12** На биссектрисе угла взята точка P . Прямая, проходящая через точку P , отсекает на сторонах угла отрезки длиной a и b . Докажите, что величина $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ постоянна и не зависит от выбора этой прямой.

М

- 13** В треугольнике, один угол которого равен 120° , проведены три биссектрисы. Докажите, что треугольник с вершинами в основаниях биссектрис прямоугольный.

ЗАДАЧИ К § Д.2

П

- 14** В треугольник MNK вписана окружность, касающаяся стороны NK в точке L . Известно, что $NM = 7$, $NK = 8$, $MK = 13$. Найдите длину отрезка KL .
- 15** В треугольнике со сторонами 4; 5 и 7 найдите радиус описанной, вписанной и трёх внеписанных окружностей.
- 16** Вписанная в прямоугольный треугольник окружность делит гипотенузу точкой касания на отрезки, длины которых равны 7 и 30. Найдите площадь треугольника.
- 17** Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренной трапеции с основаниями 30 и 16 и высотой 7.
- 18** Площадь треугольника ABC равна $2\sqrt{3} - 3$, а угол BAC равен 60° . Радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC , равен 1. Найдите углы ABC и ACB треугольника ABC .
- 19** Боковые стороны KL и MN трапеции $KLMN$ равны 5 и 13 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 6, средняя линия трапеции равна 12. Прямые KL и MN пересекаются в точке A . Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM .

- 20** Окружность радиуса $6\sqrt{2}$ вписана в прямой угол. Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках M и N . Известно, что расстояние между центрами окружностей равно 8. Найдите MN .
- 21** В параллелограмме $ABCD$ $\angle BCD = 150^\circ$, а длина стороны $AD = 8$. Найти длину радиуса окружности, касающейся прямой CD и проходящей через вершину A , а также пересекающей сторону AD на расстоянии 2 от точки D .
- 22** Докажите, что для любого треугольника выполняются соотношения:
- $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$;
 - $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$;
 - $r_a r_b r_c r = S^2$;
 - $r_a r_b + r_b r_c + r_a r_c = p^2$;
 - $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$;
 - $r_a r_b r_c = rp^2$;
 - $4R = r_a + r_b + r_c - r$.
- 23** Выведите формулу для нахождения площади треугольника по стороне и двум прилежащим углам.
- 24** Выведите формулу для нахождения площади треугольника по трём углам и радиусу описанной окружности.
- 25** В треугольнике ABC известны длины всех сторон: $AB = 11$, $BC = 8$, $AC = 7$. Точка E лежит на прямой BC так, что $BE : EC = 1 : 6$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников AEC и AEB , касаются стороны AE в точках K и M . Найдите длину отрезка KM .
- 26** Стороны треугольника имеют длины a , b и c , причём $b < c$. Докажите, что точки касания вписанной и невписанной окружностей делят сторону длиной a на три отрезка, из которых крайние равны между собой и равны $p - c$ каждый, а средний равен $c - b$.

М

- 27** Докажите, что если для некоторого треугольника выполняется соотношение $p = 2R + r$, то этот треугольник прямоугольный.

- 28** В треугольнике ABC биссектриса угла C перпендикулярна медиане, выходящей из вершины B . Центр вписанной окружности лежит на окружности, проходящей через точки A , C и центр описанной окружности. Найдите AB , если $BC = 1$.
- 29** Докажите, что отрезок, соединяющий центры вписанной и невписанной окружностей произвольного треугольника, делится описанной окружностью пополам (теорема Мансиона).
- 30** Пусть O_a – центр невписанной окружности треугольника ABC , касающейся стороны BC . Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABO_a , лежит на окружности, описанной около треугольника ABC .

ЗАДАЧИ К § Д. 3

П

- 31** В прямоугольном треугольнике с катетами 2 и 3 найдите длину биссектрисы, проведённой к гипотенузе.
- 32** В треугольнике ABC найдите длину биссектрисы AD , если $AB = 3$, $AC = 7$, $\angle BAC = 60^\circ$.
- 33** В треугольнике со сторонами 4; 5 и 7 найдите длины всех биссектрис.
- 34** В треугольнике ABC из вершины C проведены два луча, делящие угол ACB на три равные части. Найдите отношение длин отрезков этих лучей, заключённых внутри треугольника ABC , если $\angle ACB = \alpha$ и $AC : BC = 1 : 3$.
- 35** Докажите, что в любом треугольнике справедливы соотношения:
- $\frac{|b-c|}{2} < m_a < \frac{b+c}{2}$;
 - $a^2 = \frac{2}{9}(2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2)$;
 - $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ (формула Лейбница–Якоби);
 - $\frac{3}{2}p < m_a + m_b + m_c < 2p$;
 - $9r \leq m_a + m_b + m_c \leq \frac{9}{2}R$;
 - $r_a + r_b + r_c \geq \sqrt{3}p$;
 - $l_a + l_b + l_c \leq \sqrt{3}p$.

- 36** Докажите, что биссектриса лежит между соответствующими медианой и высотой, и ее длина заключена между длиной высоты и длиной медианы: $h_a \leq l_a \leq m_a$.
- 37** Докажите, что длина биссектрисы внешнего угла C треугольника выражается формулой: $l = \frac{2ab \sin \frac{C}{2}}{|a-b|}$.
- 38** Прямая l касается окружности с диаметром AB в точке C . Точки M и N – проекции точек A и B на прямую l , D – проекция точки C на AB . Докажите, что $CD^2 = AM \cdot BN$.

М

- 39** В треугольнике ABC , у которого $\angle BAC = 45^\circ$, прямая, параллельная стороне AC , пересекает стороны AB и BC соответственно в точках M и K . На отрезках AK и CM как на диаметрах построены окружности. Их общая хорда пересекает отрезок MK в точке P . Найдите угол BCA , если известно, что $PK : PM = 1 : \sqrt{3}$.
- 40** В треугольнике ABC проведены высота AH длиной h , медиана AM длиной m и биссектриса AK . Точка K – середина отрезка MH . Найдите расстояние от вершины A до точки пересечения высот треугольника ABC .

ЗАДАЧИ К § Д. 4

П

- 41** Окружность касается сторон угла с вершиной O в точках A и B . Найдите градусные меры дуг, на которые точки A и B делят окружность, если $\angle AOB = 40^\circ$.
- 42** На окружности отмечены последовательно точки A, B, C и D , так что дуги AB, BC и CD равны. Прямые AB и CD пересекаются в точке O . Найдите градусную меру угла AOD , если известно, что угол ACD в 5 раз больше угла BAC .
- 43** В равнобедренном треугольнике ABC радиус OA описанной окружности образует с основанием AC угол OAC , равный 20° . Найдите градусную меру угла BAC .

- 44** В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ACB = 25^\circ$, $\angle ACD = 40^\circ$, $\angle BAD = 115^\circ$. Найдите $\angle ADB$.
- 45** Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E ; AD — биссектриса треугольника ABC . Докажите, что $AE = ED$.
- 46** В четырёхугольнике $CDEF$ диагонали CE и DF пересекаются в точке K . Известно, что $EK = 4$, $FK = 1$, $CE : DF = 3 : 2$, а около четырёхугольника $CDEF$ можно описать окружность. Найдите длину диагонали DF .
- 47** В четырёхугольнике $ABCD$ $AB = CD$, $\angle BDA = 15^\circ$. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что его можно вписать в окружность и $AC = 20$.
- 48** Окружность проходит через соседние вершины M и K прямоугольника $MKPT$. Длина касательной, проведённой из точки T к окружности, равна 1, $PT = 2$. Найдите площадь прямоугольника $MKPT$, если диаметр окружности равен $\sqrt{5}$.
- 49** Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку A к этим окружностям проведены касательные AM и AN (M и N — точки окружностей). Докажите, что $\angle ABN + \angle MAN = 180^\circ$.
- 50** В треугольнике ABC угол B равен 60° , а биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O . Докажите, что $OD = OE$.
- 51** Вписанная в трапецию окружность делит одну из боковых сторон точкой касания на отрезки, длины которых равны 3 и 12. Найдите радиус вписанной окружности.
- 52** Основание CD , диагональ BD и боковая сторона AD трапеции $ABCD$ равны p . Боковая сторона BC равна q . Найдите длину диагонали AC .
- 53** Окружности радиусов 1 и 4 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внешним образом в точке C . AO_1 и BO_2 — параллельные радиусы этих окружностей, причём $\angle AO_1O_2 = 60^\circ$. Найдите AB .
- 54** Окружности радиусов 1 и 5 с центрами O и Q соответственно касаются в точке A . Прямая, проходящая через точку A , вторично пересекает меньшую окружность в точке B , а большую — в точке C . Найдите площадь треугольника BCQ , если $\angle ABO = \frac{\pi}{8}$.
- 55** В четырёхугольнике $ABCD$ с диагоналями $AC = 7$ и $BD = 12$ вписана окружность радиуса 3. Известно, что $AB = AD$. Найдите площадь треугольника ABD .

- 56** Угол C треугольника ABC равен 60° , D – отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC , как на диаметрах. Известно, что $DB : DC = 1 : 4$. Найдите угол A .
- 57** Окружность радиуса $\sqrt{2}$, проходящая через вершину C и середины сторон AB и BC треугольника ABC , касается стороны AB . Найдите синус угла ACB , если длина стороны AC равна 2.
- 58** Докажите, что если центр вписанной в четырёхугольник окружности совпадает с точкой пересечения диагоналей, то этот четырёхугольник – ромб.
- 59** Окружность ω проходит через вершину C прямого угла и пересекает его стороны в точках, удалённых от вершины C на расстояния 9 и 40. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся окружности ω .
- 60** Боковые стороны KL и MN трапеции $KLMN$ равны 8 и 17 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 7,5, средняя линия трапеции равна 17,5. Прямые KL и MN пересекаются в точке A . Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM .
- 61** Продолжение биссектрисы CD неравнобедренного треугольника ABC пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке E . Окружность, описанная около треугольника ADE , пересекает прямую AC в точке F , отличной от A . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если $AC = 16$, $AF = 6$, угол BAC равен 45° .
- 62** Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус этой окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 12, а тангенс острого угла треугольника равен 2,4.
- 63** Диагонали вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $BD = 3$, $\sin \angle ADB = \frac{1}{3}$ и $AD \cdot CE = CD \cdot AE$.
- 64** В треугольнике ABC известны длины всех сторон: $AB = 10$, $BC = 11$, $AC = 13$. Окружность, проходящая через точки A и C , пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и M , отличных от вершин треугольника. Отрезок KM касается окружности, вписанной в треугольник ABC . Найдите длину отрезка KM .
- 65** Из произвольной точки M катета BC прямоугольного треугольника ABC на гипотенузу AB опущен перпендикуляр MN . Докажите, что $\angle MAN = \angle MCN$.

- 66** Вершины B, C, D четырёхугольника $ABCD$ расположены на окружности с центром O , которая пересекает сторону AB в точке M , а сторону AD – в точке K . Известно, что угол BAD прямой, длина хорды MK равна длине хорды BK , и длины хорд BC, CD и MD равны между собой. Найдите угол ABO .
- 67** Углы при основании AD трапеции $ABCD$ равны α и β . Докажите, что трапеция описанная тогда и только тогда, когда $BC : AD = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$.
- 68** Окружность высекает на всех четырёх сторонах четырёхугольника равные хорды. Докажите, что в этот четырёхугольник можно вписать окружность.
- 69** Докажите, что если в выпуклом четырёхугольнике провести биссектрисы внутренних углов, то четыре точки пересечения этих биссектрис лежат на одной окружности.
- 70** Четырёхугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями AC и BD вписан в окружность. Найдите длину стороны BC , если расстояние от центра окружности до стороны AD равно 1.

М

- 71** Докажите, что если в четырёхугольник можно вписать окружность, то центр этой окружности лежит на одной прямой с серединами диагоналей (теорема Ньютона).
- 72** Докажите, что точка пересечения диагоналей описанного четырёхугольника совпадает с точкой пересечения диагоналей четырёхугольника, вершинами которого служат точки касания сторон исходного четырёхугольника с вписанной окружностью.
- 73** Четырёхугольник $ABCD$ вписанный. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABC, BCD, CDA и DAB образуют прямоугольник.

ЗАДАЧИ К § Д. 5–Д. 6

П

- 74** Найдите геометрическое место середин отрезков, концы которых лежат на сторонах данного прямого угла.

- 75** Дан прямоугольник $ABCD$. Найдите геометрическое место таких точек X , для которых $AX + BX = CX + DX$.
- 76** На окружности две точки фиксированы, а третья – любая. Найдите геометрическое место точек пересечения медиан образованных треугольников.
- 77** Внутри окружности взята точка A . Найдите геометрическое место точек пересечения касательных к окружности, проведённых через концы всевозможных хорд, содержащих точку A .
- 78** Найдите геометрическое место середин хорд данной окружности, проходящих через данную точку.
- 79** Даны две точки A и B . Две окружности касаются прямой AB (одна – в точке A , другая – в точке B) и касаются друг друга в точке M . Найдите геометрическое место точек M .
- 80** На плоскости даны четыре точки. Найдите множество центров прямоугольников, образуемых четырьмя прямыми, проходящими соответственно через данные точки.
- 81** Даны прямая и окружность. Постройте окружность данного радиуса r , касающуюся данной прямой и данной окружности.
- 82** Постройте квадрат, три вершины которого лежат на трёх данных параллельных прямых.
- 83** Постройте квадрат, если известно по одной точке на каждой прямой, содержащей сторону квадрата.
- 84** При повороте треугольника EFG на угол $\arccos \frac{1}{3}$ вокруг точки O , лежащей на стороне EG , вершина F переходит в вершину E , а вершина G – в точку H , лежащую на стороне FG . Найдите отношение $EO : OG$.
- 85** Точка Q расположена на стороне MN треугольника LMN так, что $NQ : QM = 1 : 2$. При повороте этого треугольника на некоторый угол вокруг точки Q вершина L переходит в вершину N , а вершина M – в точку P , лежащую на продолжении стороны LM за точку L . Найдите углы треугольника LMN .
- 86** Решите задачу Ферма для треугольника ABC с углом $A > 120^\circ$.
- 87** Решите задачу Ферма для выпуклого четырехугольника $ABCD$.
- 88** Дан треугольник ABC . Точка M , расположенная внутри треугольника, движется параллельно стороне BC до пересечения со стороной CA , затем параллельно AB до пересечения с BC , затем параллельно AC до пересече-

ния с AB и т.д. Докажите, что через некоторое число шагов траектория движения точки замкнётся.

- 89** Докажите, что прямые, проведённые через середины сторон вписанного четырёхугольника перпендикулярно противоположным сторонам, пересекаются в одной точке.
- 90** Через точку M основания AB равнобедренного треугольника ABC проведена прямая, пересекающая его боковые стороны CA и CB (или их продолжения) в точках A_1 и B_1 . Докажите, что $A_1A : A_1M = B_1B : B_1M$.
- 91** Докажите, что если две точки P и P_1 находятся внутри треугольника ABC и расположены так, что $\angle CBP = \angle PBP_1 = \angle P_1BA$ и $\angle ACP_1 = \angle P_1CP = \angle PCB$, то $\angle BP_1P = \angle PP_1C$.

М

- 92** Докажите, что если на сторонах некоторого параллелограмма во внешнюю (или внутреннюю) сторону построить четыре квадрата, то их центры являются вершинами ещё одного квадрата.
- 93** Пусть X, Y, Z — центры квадратов, построенных во внешнюю сторону на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC . Докажите, что отрезок AX равен и перпендикулярен отрезку YZ . (То же самое верно для пар отрезков BY и ZX ; CZ и XY .)
- 94** Пусть Z, X, U, V — центры квадратов, построенных во внешнюю сторону на сторонах AB, BC, CD, DA некоторого четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что отрезок ZU , соединяющий центры противоположных квадратов, равен и перпендикулярен отрезку XV , соединяющему центры двух других противоположных квадратов.
- 95** Найдите отношение сторон треугольника, одна из медиан которого делится вписанной окружностью на три равные части.

ЗАДАЧИ К § Д. 7

П

- 96** На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 , причём прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Найдите длины отрезков AB_1 и CB_1 , если $BA_1 = 3 \cdot CA_1$, если $BC_1 = 5 \cdot AC_1$ и $AC = 24$.
- 97** Докажите, что высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.

- 98** На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и K , причём $AM : MB = 3 : 5$, $BK : KC = 1 : 4$. Прямые CM и AK пересекаются в точке E . Найдите $CE : EM$.
- 99** На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M , T и K , причём $AM : MB = 2 : 3$, $AK : KC = 2 : 1$, $BT : TC = 1 : 2$. Отрезки AT и MK пересекаются в точке E . Найдите $AE : ET$.
- 100** Докажите, что три прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания соответствующих вневписанных окружностей с его сторонами, пересекаются в одной точке. (Эту точку называют *точкой Нагеля*.)
- 101** В прямоугольнике $ABCD$ на сторонах AB и AD взяты соответственно точки M и K так, что $AM : MB = 3 : 1$, $AK : KD = 1 : 2$. Найдите отношение $MO : OD$, где O – точка пересечения отрезков DM и CK .
- 102** В трапеции $ABCD$ основание CD в 2 раза длиннее основания AB . На сторонах $ABCD$ и BC выбраны такие точки P и T , что $DP : PA = 2$, $BT : TC = 3 : 4$. Найдите отношение площади четырёхугольников $ABTP$ и $CDPT$.
- 103** Из вершины C прямого угла треугольника ABC опущена высота CK , и в треугольнике ACK проведена биссектриса CE . Прямая, проходящая через точку B параллельно CE , пересекает CK в точке F . Докажите, что прямая EF делит отрезок AC пополам.
- 104** Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB : CD = 1 : 2$, $AC : BD = 3 : 2$. Найдите отношение $AD : BC$.
- 105** Докажите, что если на сторонах AB , AC и BC треугольника ABC взяты соответственно такие точки M , N и K , что отрезки AK , BN и CM пересекаются в точке O , то $\frac{AO}{OK} = \frac{AM}{KB} + \frac{AN}{NC}$ (теорема Ван-Обеля).
- 106** Докажите, что если на стороне BC треугольника ABC отмечена точка K , а затем на отрезке AK взята точка O , а на сторонах AB и AC взяты соответственно точки M и NK , так что $\frac{AO}{OK} = \frac{AM}{KB} + \frac{AN}{NC}$, то отрезки AK , BN и CM пересекаются в точке O (обратная теорема Ван-Обеля).
- 107** Внутри треугольника ABC взята точка O ; прямые AO , BO и CO пересекают его стороны в точках A_1 , B_1 и C_1 . Докажите, что $\frac{OA_1}{AA_1} + \frac{OB_1}{BB_1} + \frac{OC_1}{CC_1} = 1$.

- 108** На сторонах BC , CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1 , B_1 и C_1 , причём прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что прямые AA_2 , BB_2 и CC_2 , симметричные этим прямым относительно соответствующих биссектрис, тоже пересекаются в одной точке.
- 109** Прямые AP , BP и CP пересекают стороны треугольника ABC (или их продолжения) в точках A_1 , B_1 и C_1 . Докажите, что прямые, проходящие через середины сторон BC , CA и AB параллельно прямым AP , BP и CP , пересекаются в одной точке.

М

- 110** Касательные к описанной окружности неравнобедренного треугольника ABC в точках A , B и C пересекают продолжения противолежащих сторон соответственно в точках D , E и F . Докажите, что точки D , E и F лежат на одной прямой.
- 111** В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1 и биссектриса внешнего угла CC_1 . Докажите, что точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

ГЛАВА 1**К § 1.1–1.3**

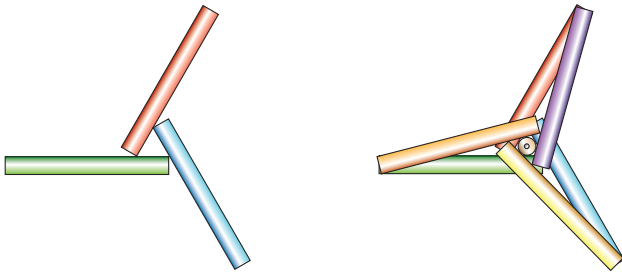
1. Общее определение геометрической фигуры таково: Геометрической фигурой называется произвольное множество точек в пространстве.
2. Плоскими фигурами называют фигуры, все точки которых лежат в одной плоскости. У пространственных фигур не все точки лежат в одной плоскости.
3. Точка, прямая, расстояние.
4. Точка, прямая, плоскость, расстояние.
6. Бесконечное множество.
7. Бесконечное множество.
9. Рассматривая рис. 1.21, делаем вывод, что точка A находится вне куба, а точка D лежит на поверхности куба – на его ребре. О точках B и C ничего определённого, рассматривая рисунок, сказать нельзя. Скажем, точка B может лежать вне куба – «впереди» него или «сзади», но может также лежать и внутри куба, и на его поверхности – в передней или задней грани. С определённой можно только сказать, что она не лежит в левой, правой, нижней или верхней гранях куба.
10. Точка, прямая, плоскость и пространство являются геометрическими фигурами, т.к. все они состоят из точек. Эти фигуры называются неопределяемыми.
11. а) Да; б) да.
14. а) Да; б) нет; в) нет.
15. а) Да; б) да; в) нет.
16. а) Обязательно; б) не обязательно.

К § 1.4–1.5

33. Такими парами могут быть, например, прямые AB и BC ; AA_1 и A_1D_1 ; BC и CC_1 ; AB и AA_1 .
34. Такими рёбрами будут рёбра AA_1 ; DD_1 ; CC_1 .
36. а) С прямой BB_1 не имеют общие точки прямые: AA_1 ; DD_1 ; DC_1 ; AD ; CD ; A_1D_1 ; C_1D_1 ; б) AD , AA_1 , A_1B_1 .
37. а) Нет; б) нет; в) может.
39. Нет.
40. а) Нет; б) прямую AB пересекают прямые SA , AD , CB , SB ; не пересекают прямую AB прямые DC , SC , SD .
43. Указание. 1) Через точки на второй и третьей прямой проведите по прямой, параллельной первой. 2) Через полученные пары пересекающихся прямых проведите по плоскости и возьмите их линию пересечения.

К § 1.6

47. б) Прямые a и c , а также b и c не лежат в одной плоскости, а значит, являются скрещивающимися.
48. а) В одной плоскости лежат, например, прямые AB , AC и BC ; б) в одной плоскости не лежат, например, прямые DB и AC , у этих прямых нет общих точек; в) с прямой AB единственную общую точку имеют прямые DA , DB , CA и CB ; г) например, AD и BC , DB и AC .
49. а) Рёбра A_1B_1 , BB_1 , D_1C_1 , CC_1 ; б) ребро A_1B_1 .
50. а) Рёбрами, не пересекающими прямую AA_1 , являются: BC ; CD ; CC_1 ; A_1D_1 ; DD_1 ; C_1B_1 ; BB_1 ; б) рёбрами, параллельными прямой AA_1 , будут: BB_1 ; CC_1 ; DD_1 .
51. Скрещивающимися прямыми, содержащими рёбра данного куба, являются, например, прямые: AA_1 и BC ; AD и CC_1 ; A_1D_1 и CC_1 .
52. С прямой BB_1 скрещиваются прямые DC , D_1C_1 , AD и A_1D_1 .
53. AB и CD ; AC и BD ; AD и BC . Три пары скрещивающихся рёбер.
54. Эта задача приводит нас к построению треугольной пирамиды.
55. Нет, нельзя.
56. На левом рисунке показано, как сложить три карандаша. Сверху них можно положить еще три карандаша, сложенных аналогичным образом (правый рисунок); при этом карандаши можно сложить так, чтобы диаметр вписанной окружности для треугольника, образованного точками касания трёх нижних (и трёх верхних) карандашей, был равен диаметру карандаша. Тогда в образовавшийся между ними зазор можно вставить седьмой карандаш.



57. Прямые a и b обладают следующими свойствами: а) эти прямые не лежат в одной плоскости; б) эти прямые не параллельны; в) эти прямые не пересекаются; г) эти прямые не имеют общих точек.
59. С прямой BA_1 скрещиваются прямые DC , D_1C_1 , AD , B_1C_1 , CC_1 , DD_1 .
60. Прямая AB скрещивается с прямой A_1D_1 и B_1C_1 . Прямая BC скрещивается с прямыми A_1B_1 и C_1D_1 . Прямая CD скрещивается с прямыми B_1C_1 , A_1D_1 и т.д.

64. BC и AD ; BD и AC ; AB и CD .
 65. Неверно, они могут быть скрещивающимися.
 66. Нет, не существуют.
 67. Все три высказывания истинны.

ГЛАВА 2

К § 2.1–2.3

1. $\angle AOB$, $\angle AOC$, $\angle BOD$, $\angle DOC$.
2. $\angle APS$; $\angle KPA$.
3. а) Образуются плоскости α , KOE , MOE ; KEM б) $\angle EOK$; $\angle MOE$.
4. $\angle PAK$, $\angle PAD$, $\angle PAC$, $\angle MAK$, $\angle MAD$, $\angle MAC$.
5. Нет, не следует.
6. Да. Ясно, что прямая не лежит в плоскости треугольника, а значит эта прямая перпендикулярна плоскости треугольника.
7. Не обязательно.
8. а) Нет; б) нет; в) нет; г) нет; д) да.
9. Во всех случаях будет перпендикулярна, т.к. прямая перпендикулярна плоскости треугольника.
10. а), в), г) верно; б) неверно; д) зависит от расположения точек; е) верно.
11. Перпендикулярны. Прямой l перпендикулярно бесчисленное множество прямых, лежащих в плоскости α .
14. а) Не может; б) может.
17. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.
18. $\sqrt{a^2 - b^2}$, нет.
19. $a \parallel b$.
24. б) $\frac{a^2\sqrt{2}}{16}$.
25. б) $\arccos\sqrt{0,3} \approx 56^\circ 48'$; $\arccos\sqrt{0,3} \approx 56^\circ 48'$; 90° .
26. $\triangle PAB = \triangle QAB$ (по трем сторонам), откуда $\angle QBA = \angle PBA$, а тогда $\angle QBX = \angle PBX$ и $\triangle QBX = \triangle PBX$. В результате $PX = QX$.
27. Отрезок DB перпендикулярен плоскости ACB .

К § 2.4–2.6

30. Отрезок OB .
31. $\angle SBA$ и $\angle SCA$.
32. а) A_1B_1 ; б) CC_1 ; в) BC .
33. Бесконечное множество.
34. а) Нет; б) да; в) да.

35. $\angle SAB$; $\angle SAC$.
36. а) Да, б) да; в) нет; г) да.
37. $MN \perp BK$ по теореме о трех перпендикулярах.
39. Нет.
41. а) Середина ребра BC ; б) грань $ABCD$; в) отрезок AD ; г) ребро BC .
42. 6 см; 2,4 см.
43. б) $\frac{ac}{a+b}$, $\frac{b\sqrt{c^2-(a+b)^2}}{a+b}$.
44. а) $180^\circ - \varphi$ или φ ; б) $\sqrt{189} \approx 13,7$ см или $\sqrt{909} \approx 30,1$ см.
45. b и $\sqrt{2a^2 + b^2}$.
46. 30 см.
47. $2\sqrt{2}$ м.
49. 4 дм; $\sqrt{7}$ дм; $0,5\sqrt{46}$ дм.
50. Расстояния равны, если прямая a проходит через проекцию точки M на плоскость α . В остальных случаях расстояние до прямой больше.
51. $0,5\sqrt{a^2 + b^2 + 4h^2}$.
52. $\frac{\sqrt{4l^2 \sin^2 \alpha - a^2}}{2 \sin \alpha}$.
56. На 10 см.
57. 45° .
58. а) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 35,26^\circ$; б) $\operatorname{arctg} \sqrt{2} \approx 54,74^\circ$.
59. $90^\circ - \varphi$.
60. $\sqrt{h^2 + \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}}$.
61. 16 см и $4\sqrt{241} \approx 62,1$ см.
62. $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + m^2}$.
63. 17 см или $5\sqrt{265} \approx 81,4$ см.
64. $\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{12}}$.
66. Пусть $a \perp \alpha$. Предположим, что a не пересекает α , тогда $a \parallel \alpha$ и в плоскости α существует прямая b , параллельная a . А это противоречит условию: прямые a и b должны быть перпендикулярны.

67. Через прямые a и b проведем плоскость β ; пусть $\alpha \cap \beta = b_1$, тогда $a \perp b_1$. Так как в плоскости β через точку A проходит единственный перпендикуляр к прямой a , то $b = b_1$ и $b \subset \alpha$.
69. $\sqrt{m^2 + n^2 \pm 2mn \cos \varphi + d^2}$.
70. 5 см и 3 см.
73. а) Проекции искомых прямых на плоскость ромба параллельны его диагоналям; б) нет, если данный ромб не квадрат.

К § 2.7

74. Прямая a и плоскость α не имеют общих точек.
75. а) Ребру BC параллельны плоскости граней $A_1B_1C_1D_1$ и ADD_1A_1 .
б) ребро A_1D_1 параллельно плоскостям граней BCC_1B_1 и $ABCD$.
76. а) Существуют, бесконечно много; б) существуют, бесконечно много.
77. а) Нет, не обязательно; б) нет, не обязательно.
78. Да, параллельна.
81. Да.
82. Прямая a и плоскость α могут быть пересекающимися, а также могут быть параллельными.
83. Нет.
84. Надо, чтобы прямая была параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в плоскости.
85. а) Нет; б) нет.
86. а) Бесконечное множество; б) бесконечное множество.
88. Через произвольную точку прямой a проведем прямую c , параллельную прямой b . Плоскость, проходящая через a и c , искомая.
91. а), б) необходимо; в) необходимо и достаточно.

ГЛАВА 3

К § 3.1

1. Общие точки расположены на прямой a .
2. а) Единственная точка; б) прямая.
3. Прямая a параллельна плоскостям α и β либо лежит в одной из них и параллельна другой.
4. Одну.
5. а), б) Бесконечное множество плоскостей; в) Если три данные точки лежат на одной прямой, то бесконечное множество, а если не лежат, то единственную.
6. 9 плоскостей.
7. а) Да; б) да; в) нет.
8. а) Да; б) нет; в) да.
14. Так как C принадлежит плоскости ABD , а M плоскости ABD , то плоскости CDM и ABD совпадают.

15. а) Да; б) нет, так как возможно точка A принадлежит прямой m .
 16. Если прямые a и b пересекаются в точке N , то прямая MN искомая. Если прямые a и b параллельны, то искомая прямая проходит через точку M и параллельна прямой a .
 18. б) Проведя биссектрису AA_1 угла BAC (точку A_1 возьмём произвольно между B и C), получим, что плоскость MAA_1 искомая.

К § 3.2

20. Двугранным углом. Четыре двугранных угла.
 21. $MACD$ и $MACB$.
 24. а) $\angle D_1DC$; б) $\angle CC_1D_1$.
 25. а) Нет; б) да.
 27. а) Нет; б) да.
 29. $\angle DAD_1 = 45^\circ$; $\angle DBD_1 = \arctg \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 36^\circ$; угол DAD_1 .
 32. а) 45° ; б) 90° .
 33. $\arcsin \frac{5}{14}$.
 34. а) 34 м; б) $34\sqrt{5} \approx 76$ м; в) $\arctg 0,5 \approx 27^\circ$.
 35. $b \cos \varphi \approx 3,6$ м.
 38. $3\sqrt{3} h^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha$ или $\frac{\sqrt{3}}{3} h^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha$.
 41. а) 36 см; б) $AA_1 = \frac{mp}{m+n}$; $BB_1 = \frac{np}{m+n}$.

К § 3.3

46. В кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ грань $ABCD$ перпендикулярна граням A_1ABB_1 ; B_1BCC_1 ; D_1DCC_1 и A_1ADD_1 . Для других граней аналогично.
 47. Эти сечения перпендикулярны друг другу и плоскостям оснований.
 48. Нет, не верно.
 49. Нужно знать, что двугранный угол между этими плоскостями – прямой.
 52. Нельзя.
 53. Верно.
 54. Нет.
 55. Указание: Вспомните определение перпендикуляра к плоскости.
 58. а) Да; б) нет.
 62. $4,5\sqrt{2}$ см.
 64. 75 мм.

66. 109 см.

67. $\frac{a}{2}$.

69. $\sqrt{p^2 + q^2}$.

71. 170 см.

К § 3.4–3.5

76. $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$; AA_1D_1D и BB_1C_1C ; AA_1B_1B и DD_1C_1C .

77. Моделями параллельных плоскостей являются: пол и потолок, противоположные стены класса; боковые стенки шкафа; обложки нераскрытой книги и т.д.

78. Нет, не верно.

79. 36 см. Указание: Воспользуйтесь теоремой Фалеса.

80. а) Нет; б) нет.

82. A_1 , C_1 , D .

83. а) Да; б) нет; в) нет.

84. Могут.

85. Нет, не следует.

86. Нет, не могут; $\alpha \parallel \beta$.

93. $GH = 6$.

95. Нет.

98. Плоскости ABC и DEG параллельны, поэтому замкнутая ломаная имеет параллельные отрезки AF и CD , которые будут равны. Для остальных пар звеньев доказательство аналогично.

К § 3.6

109. а) Бесконечное множество; б) прямой, параллельной данным прямым.

110. а) Единственный; б) точкой.

113. Лежит в плоскости α .

114. а) a ; б) a ; в) a ; г) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; д) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; е) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

115. а) Да; б) да; в) нет.

118. $\sqrt{a^2 + m^2 + n^2 \pm 2mn \cos \varphi}$.

119. $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

120. $\frac{a}{\sqrt{6}}$.

$$123. \frac{a \sin \alpha \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}}.$$

$$124. \frac{3a}{4}.$$

$$125. \frac{a\sqrt{\cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

ГЛАВА 4

К § 4.1

1. Наименьшее число рёбер, а также наименьшее число граней имеет треугольная пирамида – по 4.
2. Каждое ребро многогранника является общей стороной двух граней, значит, число сторон всех граней многогранника чётно. Но общее число сторон всех граней многогранника, данного в условии, нечётно, так как оно равно сумме нечётного числа нечётных слагаемых. Противоречие.
3. Если число граней с нечётным числом сторон в данном многограннике нечётно, то суммарно число сторон в этих гранях будет нечётно как сумма нечётного числа нечётных слагаемых. Число же рёбер в остальных гранях (с чётным числом сторон) будет чётно. Отсюда следует, что общее число сторон всех граней многогранника будет нечётно, что противоречит доказанному в задаче 2. Таким образом, число граней с нечётным числом сторон в многограннике не может быть нечётным.
4. Каждое ребро многогранника соединяет две его вершины. Суммарное число рёбер, выходящих из каждой вершины данного многогранника, чётно. Отсюда следует, что число нечётных слагаемых в этой сумме не может быть нечётным.
5. Рассмотрим сечение, параллельное какому-либо ребру многогранника и пересекающее все рёбра, выходящие из концов этого ребра. Т.к. в каждой вершине многогранника сходится не менее трёх рёбер, то указанное сечение будет иметь не менее четырёх сторон, и, таким образом, многогранника, все сечения которого – треугольники, не существует.
6. Пусть n – число граней данного многогранника. Если все его грани являются треугольниками, то число рёбер этого многогранника равно $3n/2$, т.е. делится на 3. Если же у многогранника имеется хотя бы одна не треугольная грань, то число его рёбер не меньше 8.

К § 4.2

8. С отрезком A_1C в одной плоскости лежат отрезки AC и AC_1 .
9. а) Да; б) да; в) да.
10. Да.

11. Да.
12. Нет.
13. Правильные n -угольники при $n = 3; 4; 6$.
15. а) 20; б) 60; в) 45.
16. а) 36; б) 54; в) 27.
19. $S_{\text{сеч}} = \frac{7a^2\sqrt{17}}{24}$.
21. $2 + \sqrt{2}$.
25. Шестиугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.
30. Все грани являются квадратами.
31. Нет.
32. а), в), д).
33. $1,5\sqrt{41}$ см².
39. а) Через точку M проведите прямую, параллельную прямой AC , через точку пересечения этой прямой с ребром AA_1 проведите прямую, параллельную прямой AB .
б) Через точку M проведите прямую, параллельную прямой AA_1 , через точку пересечения этой прямой с прямой AC проведите прямую, параллельную прямой AB .
41. Сумма площадей оснований равна 192 см². Площадь боковой поверхности равна 800 см². Площадь полной поверхности равна 992 см².
43. а) 150 см²; б) 81 см²; в) 486 см²; г) 864 см².
44. $3\sqrt{3}$ см.
47. а) $2ab$; б) $2(ac + bc)$; в) $2(ab + bc + ac)$.
48. 19 кусков.
49. а) $\frac{2}{3}$; б) да.
50. 18 м².
51. $2(S_1 + S_2 + \frac{1}{a^2} S_1 S_2)$.
52. $\sqrt{\frac{S_1 S_2}{S_3}}; \sqrt{\frac{S_1 S_3}{S_2}}; \sqrt{\frac{S_2 S_3}{S_1}}$. Указание: Пусть длины рёбер x, y и z . Тогда $xy = S_1, xz = S_2, yz = S_3$. Перемножив эти равенства, получим $x^2 y^2 z^2 = S_1 S_2 S_3$, откуда $xyz = \sqrt{S_1 S_2 S_3}$.
53. а) 10 вершин; б) 15 рёбер; в) 7 граней; г) равные правильные пятиугольники; д) параллельными являются все боковые рёбра призмы и соответственные рёбра оснований.

54. а) Параллельными являются все боковые рёбра призмы и соответственные рёбра оснований; параллельны основания призмы; б) равными фигурами являются основания призмы.
55. а) Треугольник; б) квадрат; в) прямоугольник; г) $(n - 2)$ -угольник.
56. а) 8; б) $n + 2$.
57. Нет.
58. а) – г) Да.
59. а) Нет; б) да, но обязательно параллелограммом; в) нет.
60. а) Да; б) нет; в) нет; г) да; д) нет.
61. Число боковых граней призмы равно числу сторон основания.
62. а) Нет; б) да; в) нет; г) да; д) нет.
63. У n -угольной призмы $2n$ вершин, $n + 2$ грани и $3n$ рёбер.
65. И прямая, и наклонная призма могут иметь одинаковое наименьшее число вершин, рёбер и граней. Для треугольной призмы: 5 граней, 9 рёбер, 6 вершин.
66. а) 0; б) 4; в) 18; г) $n(n-3)$.
69. а) ab ; б) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$; в) $2ab$; г) $\sqrt{4a^2 + b^2}$.
70. $a\sqrt{2}$, $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{b + 2a^2}$.
71. 108° .
72. $l \sin \alpha$
74. $120\sqrt{2} \text{ см}^2 \approx 170 \text{ см}^2$.
75. $a\sqrt{2}$, $2a$, a^2 , $a^2\sqrt{3}$.
76. $\frac{2a \cos \frac{\varphi}{2}}{\cos \beta}$; $2a\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^2 \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg}^2 \beta}$.

К § 4.3

78. а) Прямая AB параллельна плоскостям граней DCC_1D_1 и $A_1D_1C_1B_1$.
79. Может.
80. Либо две, либо ни одной.
81. Верно. Обратное тоже верно.
82. Верно. Обратное тоже верно.
83. Неверно.
84. а) Нет; б) нет.
85. а) Да; б) могут; может иметь и ось симметрии, и плоскость симметрии.
88. $4a + 4b + 4c$.
94. $100\sqrt{101 \pm 10\sqrt{2}} \text{ см}$.
95. $\sqrt{517 \pm 126\sqrt{2}} \text{ см}$.
96. $ab\sqrt{-2\cos 2\varphi}$; $ab\sqrt{2}$.

97. а) Заметьте, что грани BB_1C_1C и AA_1D_1D параллельны; б) воспользуйтесь тем, что прямые AA_1 и BB_1 параллельны.

98. 183.

$$107. \text{ а) } \sqrt{S_1 S_2 S_3}; \text{ б) } \sqrt{\frac{S_1^2 S_2^2 + S_2^2 S_3^2 + S_1^2 S_3^2}{S_1 S_2 S_3}}.$$

$$108. \arccos\left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right).$$

$$110. 0,8\sqrt{146} \text{ дм.}$$

$$113. \text{ а) } \sqrt{d^2 - m^2}; \text{ б) } \sqrt{m^2 - n^2}; \text{ в) } \frac{n\sqrt{m^2 - n^2}}{m}.$$

$$116. \frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{39}}{4}.$$

$$118. \frac{12\sqrt{2}}{5}; \frac{\sqrt{337}}{5}.$$

К § 4.5–4.6

120. Наименьшее число граней и рёбер имеет треугольная пирамида.

122. а) Нет; б) да; в) нет; г) да.

123. Равнобедренными треугольниками.

124. Развёртки тетраэдров.

125. Либо одно, либо ни одного.

126. Две грани.

127. У правильной четырехугольной пирамиды диагональное сечение является плоскостью симметрии.

128. а) Только квадрат; б) может.

129. а) 3; б) 4; в) да.

130. а) Да; б) да.

$$132. \text{ а) } 2\arcsin\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right); \text{ б) } \arccos\left(\sqrt{2}\sin \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$133. 64\sqrt{2} \approx 90,5 \text{ см}^2.$$

$$134. \text{ б) } \frac{2}{9}ab.$$

$$135. \text{ а) Да, её высота равна } \sqrt{a^2 - R^2}, \text{ где } R = \frac{a}{2\sin 36^\circ} < a;$$

б), в) нет, так как $R \geq a$.

$$136. \text{ а) } \frac{1}{8}a^2 \operatorname{tg} \varphi; \text{ б) } \frac{\sqrt{2}}{4}a^2 \operatorname{tg} \varphi \text{ в) } \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 \operatorname{tg} \varphi$$

137. Замечаем, что общий отрезок диагональных сечений данной пирамиды является общей медианой прямоугольных треугольников, проведённой

из вершин прямых углов. А так как эта медиана равна половине гипотенузы, то гипотенузы имеют равные длины. Следовательно, у данного параллелограмма диагонали равны, он является прямоугольником.

138. $30^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 60^\circ$.

139. $12 \text{ см}^2; 16 \text{ см}^2$.

140. а) $\frac{1}{4}a\sqrt{36h^2+3a^2}$; б) $a\sqrt{4h^2+a^2}$; в) $\frac{3}{2}a\sqrt{4h^2+3a^2}$;

г) $\frac{1}{4}na\sqrt{4h^2+a^2}\text{ctg}^2\frac{180^\circ}{n}$.

141. $\frac{1}{2}(ah+bh+ab+\sqrt{a^2h^2+b^2h^2+a^2b^2})$.

142. $0,5a^2(6+3\sqrt{3}+\sqrt{7}) \approx 6,92 a^2$.

143. $S_{\text{бок}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$, $S_{\text{пир}} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

144. $\frac{(a+b)h}{2} + \frac{1}{2}a\sqrt{b^2+h^2} + \frac{1}{2}b\sqrt{a^2+h^2}$.

145. $\frac{a^2 \sin \alpha}{\cos \varphi}(\sin \alpha + \sin \varphi)$.

147. $54\sqrt{2} \text{ см}^2$.

148. а) 6 вершин, 9 рёбер, 5 граней; б) треугольная ни одного; четырёхугольная – 2; шестиугольная – 9; в) либо одно, либо ни одного.

149. На пирамиду и усечённую пирамиду.

152. Могут.

153. 9 см .

155. а) $\frac{h}{2}$; б) $\frac{h}{\sqrt{n}}$.

156. б) $\left(\frac{m}{m+n}\right)^2 Q$.

158. 48 см^2 .

159. а) $\frac{3}{4}(a+b)\sqrt{4h^2+\frac{(a-b)^2}{3}}$; б) $(a+b)\sqrt{4h^2+(a-b)^2}$;

в) $\frac{1}{4}n(a+b)\sqrt{4h^2+(a-b)^2}\text{ctg}^2\frac{180^\circ}{n}$.

161. $(a+b)\left(c+\frac{1}{4}\sqrt{12e^2+3(a-b)^2}\right)$.

162. $\approx 176 \text{ см}^2$.

164. 240 см^2 ; 448 см^2 .

165. $\frac{51\sqrt{95}}{16} \approx 31 \text{ см}^2$; $\frac{51\sqrt{95} + 169\sqrt{3}}{16} \approx 49,3 \text{ см}^2$.

166. 100 см^2 ; 168 см^2 .

К § 4.7

167. Вершина угла – точка O . Рёбра угла – OA , OB и OC . Трёхгранный угол имеет три ребра и три грани.

168. Все плоские углы $\angle AOB$, $\angle AOC$ и $\angle BOC$ равны 90° .

169. При пересечении трехгранного угла плоскостью можно получить: точку, луч, плоский угол, треугольную пирамиду.

170. Третий плоский угол будет меньше суммы двух других плоских углов.

171. Все по 90° .

172. Примените способ рассуждения от противного.

173. Примените теорему о величине плоских углов трехгранного угла к трехгранным углам $ABCD$ и $BACD$.

174. 60° .

175. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

176. 45° .

177. Сумма плоских углов трехгранного угла должна быть меньше 360° . Каждый плоский угол должен быть меньше суммы величин двух остальных плоских углов.

178. а) – в), д) – з) нельзя; г) можно.

179. а) $10^\circ < x < 150^\circ$; б) $10^\circ < x < 170^\circ$.

180. Могут.

181. а) Ров; б) вар.

182. На фронтальной – цветок и листочки; на вертикальной – корабли и волны; на горизонтальной – клеточки.

184. O – вершина угла, OA , OB , OC , OD – ребра угла. Четырёхгранный угол имеет 4 плоских угла.

185. Трёхгранный угол определяют три луча; четырёхгранный – четыре; пятигранный – пять. Лучи должны иметь общее начало и не должны лежать в одной плоскости.

187. Нужно приложить его к плоскости (поверхности стола) всеми его гранями по очереди.

189. а), б) Нет.

191. Многогранный угол может иметь: а) 12 граней; б) 8 граней; в) 4 грани; г) 3 грани.

192. 14 граней.

195. а) 60° ; в) 45° ; г) 36° .

К § 4.8

206. $\frac{a \cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$

210. $120^\circ.$

212. $\frac{a \sqrt{1 + \cos \alpha - 2 \cos^2 \alpha}}{\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}}.$

214. $45^\circ; \arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}; \arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}.$

216. $\frac{h}{\sqrt{-\cos 2\alpha}}.$

218. Нет.

219. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}; \pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}; \pi - \arccos \frac{1}{3}.$

226. $\alpha = \beta = 90^\circ.$

К § 4.9

Правильные многогранники

227.

Название	Число граней	Число сторон грани	Число ребер	Число вершин	Число рёбер многогранного угла
Тетраэдр	4	3	6	4	3
Гексаэдр	6	4	12	8	3
Октаэдр	8	3	12	6	4
Додекаэдр	12	5	30	20	3
Икосаэдр	20	3	30	12	5

229. а) Да; б) да; в) да.

230. а) Нет; б) нет; в) нет.

231. Нет.

232. Нет.

236. 5.

243. $a\sqrt{2}.$

247. а) $\arccos \frac{1}{3} \approx 70^\circ 32';$ б) $2 \arctg \sqrt{2} \approx 109^\circ.$

249. $\frac{a\sqrt{6}}{3}.$

251. а) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$; б) $\sqrt{6}$.
253. а) $2\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}+3}{2} \approx 138^\circ$; б) $2\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 117^\circ$.
254. $\frac{d^2}{4}(3\sqrt{3}+1) \approx 1,55 d^2$.
255. б) $\sqrt{3} a^2$; в) $2\sqrt{3} a^2$.
256. $2a^2\sqrt{3}$.
257. $\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{3}}$.
258. $25\sqrt{3} \text{ см}^2$.
262. $\frac{2S}{3\sqrt{3}}$.
263. а) $5\sqrt{3}a^2$; б) $15 a^2\operatorname{ctg}36^\circ$.

ГЛАВА 5

К § 5.1, 5.3 И 5.4

- а) OA, OB, OC, OD ; б) Например, BC ; в) Например, AB и CD ; г) $OA = OC = OB = OD$.
- а) Снаружи; б) внутри; в) снаружи.
- Нет.
- Бесконечно много.
- а), б) Верно; в) неверно; г) – ж) верно.
- а) Верно; 2) верно, если точки не диаметрально противоположны.
- Если две данные большие окружности являются объединениями меридианов на поверхности Земли, то большая окружность экватора перпендикулярна двум данным большим окружностям.
- а) Сколько угодно сфер; б) если они не лежат на одной прямой, то бесконечное множество сфер; в) если они не лежат в одной плоскости, то единственную сферу.
- Три точки на сфере образуют треугольник. Центр и радиус окружности на сфере, проходящей через три данные точки, находятся как центр и радиус окружности, описанной около построенного треугольника.
- Через две точки можно провести бесконечное множество сечений. Через три – только одно.
- Бесконечное множество больших кругов можно провести через два полюса сферы.
- Сечений можно провести бесконечно много. Больших кругов – один.
- Прямые перпендикулярны.

19. Прямых существует бесконечное множество. Все они образуют плоскость.
20. 24 см.
21. см.
23. $4\pi \text{ м}^2$; $4\pi \text{ м}$.
24. Нет.
25. 30 см.
26. Расстояние между интересующими нас точками равно $1/6$ от длины окружности большого круга.
27. ≈ 8 см. Надо найти высоту тетраэдра с ребром 10 см.
29. $d = \sqrt{R^2 - \left(\frac{S}{p}\right)^2} = 4 \text{ см}$ (S – площадь треугольника, p – его полупериметр).
30. а) Нет; б) $\sqrt{731} \approx 27 \text{ см}$.
31. а) экватор; б) 15000 км.
32. а) $\approx 6700 \text{ км}$; б) $\approx 5700 \text{ км}$.
33. а) Прямая, перпендикулярная плоскости, проходящей через данные точки; б) плоскость, параллельная данным плоскостям.
34. б) Сфера, для которой данная гипотенуза служит диаметром.
35. $a\sqrt{\frac{7}{12}}$.
36. а) Две плоскости, параллельные данной плоскости; б) сфера радиуса r .
37. а) прямая, перпендикулярная данной плоскости, без одной точки; б) плоскость, перпендикулярная данной прямой, без одной точки.
38. 24 см.
39. 10 см или 70 см.
40. $R = 50 \text{ см}$. Указание: радиус R шара и радиус r окружности сечения связаны соотношением $R^2 - r^2 = 30^2$. По условию $r = \frac{4}{5}R$.
41. Через две окружности можно провести единственную сферу. Третья окружность пересекает первые две в четырёх точках, поэтому она лежит на сфере.
44. Рассмотрите следующие случаи:
1) точки A и B не разделены ни плоскостью α , ни плоскостью β ; 2) точки A и B разделены хотя бы одной из данных плоскостей.

К § 5.5

46. Данная точка принадлежит одному из восьми трёхгранных углов, определяемых данными плоскостями. Впишем в соответствующий трёхгранный угол произвольную сферу, центр которой принадлежит прямой, по которой пересекаются биссекторные плоскости двугранных углов трёхгранно-

го угла. Далее следует воспользоваться преобразованием гомотетии. Задача имеет или два, или одно решение, или не имеет ни одного решения. Отдельно рассмотрите случай, когда точка принадлежит плоскости.

49. 2 см и 128 см.

50. а) $2\arcsin \frac{6400}{6657} \approx 148^\circ$; б) 13057 км.

51. $\frac{\pi r^2}{4}$.

52. Первое; 1, 12.

59. $16\pi \text{ м}^2$.

60. $S = \pi(4 - x^2)$.

62. 3 : 4.

64. Нет.

73. б) $\frac{5\sqrt{1131}}{8} \approx 21 \text{ см.}$

79. $d_1 + d_2$.

81. 2 см.

83. а) $2\pi r$; б) $r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}$.

88. $\frac{2\pi r^2}{\cos^2 \frac{n}{4}}$.

90. $3\sqrt{\frac{3,14}{\pi}} \approx 3 \text{ дм.}$

92. $\frac{a^2(\pi + 3\sqrt{3})}{24}$.

97. а) $24\pi \text{ см}^2$; б) $16\pi \text{ см}^2$.

ДОПОЛНЕНИЕ

К § Д. 1

1. 3 и 4.

2. 25° .

3. 25° .

5. 90° , 80° , 10° .

6. 30° .

8. 11,25 или 7,2.

9. $(a + b) : c$, $(b + c) : a$, $(c + a) : b$, считая от вершин.

11. $\frac{b(a+c)}{c}$.

К § Д. 2

14. 7.

15. $R = \frac{35\sqrt{6}}{24}, r = \frac{\sqrt{6}}{2}, r_a = \sqrt{6}, r_b = \frac{4\sqrt{6}}{3}, r_c = 4\sqrt{6}.$

16. 210.

17. 17.

18. 90° и 30° .

19. 1 или 3.

20. $4\sqrt{2}; 4\sqrt{14}.$

21. $10 \pm 4\sqrt{3}.$

23. $S = \frac{a \sin B \sin C}{2 \sin(B+C)}.$

24. $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$

25. $\frac{34}{7}; 6.$

28. $\frac{\sqrt{13}+1}{2}.$

К § Д. 3

31. $1, 2\sqrt{2}.$

32. $2, 1\sqrt{3}.$

33. $\frac{8\sqrt{10}}{9}, \frac{8\sqrt{42}}{11}, \frac{2\sqrt{70}}{3}.$

34. $\left(2\cos\frac{\alpha}{3}+3\right); \left(6\cos\frac{\alpha}{3}+1\right).$

39. $60^\circ.$

40. $\frac{m^2-h^2}{2h}.$

К § Д. 4

41. 140° и $220^\circ.$

42. $90^\circ.$

43. 35° или $55^\circ.$

44. $25^\circ.$

46. 3.

47. 100.

48. $\sqrt{5} \pm 1.$

51. 6.

52. $\sqrt{4p^2 - q^2}$.
53. 5 или 7.
54. $10\sqrt{2}$ или $15\sqrt{2}$.
55. 15 или 27.
56. $\arcsin \frac{5\sqrt{13}}{14}$ или $\arcsin \frac{3\sqrt{3}}{14}$.
57. 0,5.
59. 8 или 90.
60. 2 или 5.
61. $5\sqrt{2}$ или $11\sqrt{2}$.
62. 10 или 7,2.
63. $2\sqrt{2}$.
64. $\frac{52}{17}$; 13.
66. $\frac{3\pi}{7}$.
70. 2.

К § Д. 5–Д. 6

74. Четверть окружности с центром в вершине угла и радиусом, равным половине отрезка.
75. Прямая, проходящая через середины сторон BC и AD .
77. Прямая, перпендикулярная OA , где O – центр окружности. Постройте эту прямую, найдя на ней одну точку.
78. Окружность с диаметром MO .
79. Окружность с диаметром AB (исключая точки A и B).
80. Три окружности.
84. 3 : 1.
85. 120° , 30° , 30° .
95. 5:10:13.

К § Д. 7

96. 9 и 15.
98. 32 : 3.
99. 6 : 7.
101. 5 : 4.
102. 19 : 44.
104. 1 : 4.

А. 1.	Существует хотя бы одна прямая и хотя бы одна плоскость. Каждая прямая и каждая плоскость есть несовпадающее с пространством непустое множество точек. Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.	9
А. 2 (аксиома плоскости).	Через любые три точки пространства проходит плоскость, причём если эти три точки не принадлежат одной прямой, то проходящая через них плоскость единственная.	9
А. 3 (аксиома прямой и плоскости).	Прямая, проходящая через две различные точки плоскости, лежит в этой плоскости.	10
А. 4 (аксиома пересечения плоскостей).	Если две различные плоскости имеют общую точку, то их пересечение есть прямая.	10
А. 5 (аксиома прямой на плоскости).	Через любые две различные точки плоскости проходит одна и только одна прямая.	10
А. 6 (аксиома расстояния).	Для любых двух точек A и B пространства однозначно определено некоторое неотрицательное число AB , называемое расстоянием между ними и обладающее следующими свойствами: 1) $AB = BA$; 2) $AB = 0$ тогда и только тогда, когда точки A и B совпадают; 3) $AC \leq AB + BC$, причём равенство достигается в том и только в том случае, когда точка B лежит на отрезке AC .	11
А. 7 (аксиома о разбивании пространства плоскостью).	Любая плоскость разбивает пространство на два полупространства.	11
А. 8 (аксиома параллельных на плоскости).	Через точку, не лежащую на данной прямой, нельзя провести более одной прямой, параллельной данной.	12

Т.1	Через две различные точки пространства проходит единственная прямая.	13
Т.2.	Через прямую и не лежащую на ней точку проходит одна и только одна плоскость.	13
Т.3	Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, причём единственная.	15
Т.4	Через две параллельные прямые проходит единственная плоскость.	19
Т.5	Через точку в пространстве, не лежащую на данной прямой, можно провести единственную прямую, параллельную этой прямой.	20
Т.6	Если прямые a и b параллельны прямой c , то прямые a и b параллельны или совпадают.	21
Т.7	Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то такие прямые скрещиваются.	23
Т.8	Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости и проходящим через точку пересечения этой прямой и плоскости, то она перпендикулярна плоскости.	48
Т.9	Если прямая a перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости α , то она перпендикулярна плоскости α .	50
Т.10	Если плоскость перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.	56
Т.11	Если две различные прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.	57
Т.12	Перпендикуляр короче всякой наклонной, проведённой из той же точки. Всякая наклонная длиннее своей проекции.	59
Т.13	Если из точки S , лежащей вне плоскости α , проведены отрезки $SA, SB, SC, \dots$ во все точки плоскости α и SH – кратчайший из них, то SH – перпендикуляр к плоскости.	60

T.14	Если из одной точки к плоскости проведены несколько наклонных, то чем длиннее проекция наклонной, тем длиннее наклонная, если равны проекции наклонных, то равны и наклонные.	60
T.15	Если из одной точки к плоскости проведены несколько наклонных, то чем длиннее наклонная, тем длиннее проекция; если наклонные равны, то и проекции равны.	60
T.16	Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна и самой наклонной.	61
T.17	Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и её проекции.	61
T.18	(Теорема о трёх перпендикулярах.) Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной к этой плоскости тогда и только тогда, когда она перпендикулярна её проекции.	62
T.19	Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, расположенной в этой плоскости, то она параллельна этой плоскости.	67
T.20	(Обратная признаку параллельности прямой и плоскости.) Если прямая параллельна плоскости, то она параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости.	68
T.21	Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения параллельна данной прямой.	68
T.22	Если плоскость и не лежащая в ней прямая перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.	68
T.23	(Теорема о двух прямых, параллельных третьей.) Если две различные прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.	69
T.24	Через каждую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная данной прямой, и притом только одна.	89
T.25	Все линейные углы двугранного угла равны друг другу.	92
T.26	Прямая, лежащая в одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная их линии пересечения, перпендикулярна другой плоскости.	97
T.27	Прямая, имеющая общую точку с одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная другой плоскости, лежит в первой из них.	98

Т.28	Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.	99
Т.29	Если две плоскости, перпендикулярные третьей плоскости, пересекаются, то прямая их пересечения перпендикулярна третьей плоскости.	100
Т.30	Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.	102
Т.31	Если прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.	102
Т.32	Отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны.	104
Т.33	(Признак параллельности двух плоскостей.) Если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны.	105
Т.34	Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.	106
Т.35	Если прямая перпендикулярна к одной из параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и к другой.	109
Т.36	Две различные плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.	110
Т.37	Параллельные плоскости проходят на постоянном расстоянии друг от друга, или одинаково удалены одна от другой.	111
Т.38	Концы равных перпендикуляров к данной плоскости, расположенные в одном полупространстве относительно неё, лежат в одной плоскости, параллельной данной, и полностью заполняют эту плоскость.	112
Т.39	Для любых двух скрещивающихся прямых существуют две параллельные плоскости, одна из которых содержит одну из этих прямых, а другая – другую прямую.	114
Т.40	Плоскости в теореме 39 определяются единственным образом.	115
Т.41	У любых двух скрещивающихся прямых существуют общий перпендикуляр, причём единственный. Его длина меньше длины любого другого отрезка с концами на скрещивающихся прямых.	115
Т.42	Все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.	147

Т.43	Сумма квадратов всех диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов всех его рёбер.	147
Т.44	Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.	148
Т.45	Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания призмы на высоту.	154
Т.46	Если пересечь пирамиду плоскостью, параллельной её основанию, то: 1) боковые рёбра и высота пирамиды разделятся на пропорциональные между собой части; 2) сечение есть многоугольник, подобный основанию; 3) отношение площадей сечения и основания равно отношению квадратов их расстояний от вершины пирамиды.	156
Т.47	Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению периметра её основания на половину апофемы.	158
Т.48	Боковая поверхность правильной усечённой пирамиды равна произведению полусуммы периметров её оснований на апофему.	159
Т.49	В трёхгранном угле сумма плоских углов меньше 360° .	166
Т.50	В трёхгранном угле каждый плоский угол больше разности двух других плоских углов.	166
Т.51	(Первая теорема косинусов для трёхгранного угла.) Для трёхгранного угла, плоские углы которого равны α , β и γ , а противолежащие им двугранные углы соответственно равны A , B , C , имеет место равенство: $\cos \alpha = \cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos A$.	168
Т.52	(Вторая теорема косинусов для трёхгранного угла.) Для трёхгранного угла, плоские углы которого равны α , β и γ , а противолежащие им двугранные углы соответственно равны A , B , C , имеет место равенство: $\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos \alpha$.	171
Т.53	(Теорема синусов для трёхгранного угла.) Для трёхгранного угла, плоские углы которого равны α , β и γ , а противолежащие им двугранные углы соответственно равны A , B , C , имеет место равенство: $\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C}$	172
Т.54	(Теорема Эйлера.) Пусть Γ – число граней, B – число вершин и P – число рёбер произвольного выпуклого многогранника. Тогда $\Gamma + B - P = 2$.	175

Т.55	Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.	220
Т.56	Всякое сечение сферы плоскостью есть окружность. Центр этой окружности есть основание перпендикуляра, опущенного из центра сферы на секущую плоскость.	221
Т.57	Плоскость, перпендикулярная радиусу шара (сферы) в его внешнем конце, является касательной к этому шару (сфере).	223
Т.58	Каждая касательная плоскость к сфере перпендикулярна радиусу этой сферы, проведённому в точку касания.	224
Т.59	Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, отношение которых равно отношению прилежащих сторон.	256
Т.60	Если две точки делят отрезок в одинаковом отношении, считая от одного и того же его конца, то эти точки совпадают.	257
Т.61	Если на стороне AC треугольника ABC взята такая точка M , что $\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC}$, то BM – биссектриса угла ABC .	258
Т.62	Биссектриса внешнего угла треугольника пересекает продолжение противоположной стороны в точке, отношение расстояний от которой до концов этой стороны равно отношению соответствующих прилежащих сторон треугольника.	258
Т.63	Площадь треугольника равна произведению всех его сторон, делённому на учетверённый радиус описанной окружности: $S = \frac{abc}{4R}$, где a, b, c – стороны треугольника, R – радиус описанной около него окружности.	262
Т.64	Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности: $S = pr$, где a, b, c – стороны треугольника, $p = \frac{a+b+c}{2}$ – его полупериметр, r – радиус вписанной в него окружности.	262
Т.65	Площадь треугольника равна произведению разности его полупериметра и стороны на радиус внеписанной окружности, касающейся этой стороны: $S = (p-a)r_a$, где a, b, c – стороны треугольника, $p = \frac{a+b+c}{2}$ – его полупериметр, r_a – радиус внеписанной окружности, касающейся стороны a .	264

T.66	Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.	266
T.67	Длина биссектрисы треугольника может быть вычислена по формуле: $l_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}$, где l_a – длина биссектрисы, проведённой к стороне длиной a из вершины A ; b, c – длины сторон треугольника, между которыми проходит биссектриса, A – угол между этими сторонами.	267
T.68	Для длины биссектрисы треугольника выполняется соотношение: $l_a^2 = bc - mn$, где l_a – длина биссектрисы, проведённой к стороне длиной a из вершины A ; b, c – длины сторон, между которыми проходит биссектриса, m, n – длины отрезков, на которые биссектриса делит сторону, к которой проведена.	269
T.69	Величина угла с вершиной внутри окружности равна полусумме угловых величин дуг, лежащих внутри данного угла и угла, с ним вертикального.	272
T.70	Величина угла с вершиной вне окружности и сторонами, пересекающими окружность, равна полуразности угловых величин дуг, лежащих внутри этого угла.	274
T.71	Величина угла между касательной и хордой, проходящей через точку касания, равна половине угловой величины дуги, лежащей внутри этого угла.	275
T.72	Произведения отрезков каждой из двух пересекающихся хорд окружности равны.	276
T.73	Если из одной точки к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат касательной равен произведению отрезков секущей (все отрезки отмеряются от одной точки).	277
T.74	Произведения отрезков каждой из двух секущих, проведённых к окружности из одной точки, равны (все отрезки отмеряются от одной точки).	279
T.75	(Свойство вписанного четырёхугольника.) Сумма противоположных углов вписанного в окружность четырёхугольника равна 180° .	281
T.76	(Признак вписанного четырёхугольника.) Если сумма двух противоположных углов четырёхугольника равна 180° , то около этого четырёхугольника можно описать окружность.	281
T.77	(Свойство описанного четырёхугольника.) Суммы противоположных сторон описанного около окружности четырёхугольника равны.	282

Т.78	(Признак описанного четырёхугольника.) Если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в этот четырёхугольник можно вписать окружность.	283
Т.79	(Теорема Чебы.) Если на сторонах AB , AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M , N и K , то отрезки AK , BN и CM пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{AN}{NC} \cdot \frac{CK}{KB} \cdot \frac{BM}{MA} = 1$.	304
Т.80	(Теорема Чебы в форме синусов.) Если на сторонах AB , AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M , N и K , то отрезки AK , BN и CM пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{\sin \angle BAK}{\sin \angle CAK} \cdot \frac{\sin \angle ACM}{\sin \angle BCM} \cdot \frac{\sin \angle CBN}{\sin \angle ABN} = 1$.	307
Т.81	(обобщённая Теорема Чебы.) Если на прямых, содержащих стороны AB , AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M , N и K , то прямые AK , BN и CM пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{AN}{NC} \cdot \frac{CK}{KB} \cdot \frac{BM}{MA} = 1$.	308
Т.82	(Теорема Менелая.) Если на сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и K , а на продолжении стороны AC – точка N , то эти три точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$.	313
Т.83	(Обобщённая теорема Менелая.) Если на продолжениях сторон AB , BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M , K и N , то эти три точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$.	315
Т.84	При растяжении или сжатии окружности вдоль одного из диаметров получится эллипс.	320
Т.85	Если $M(x_0; y_0)$ – произвольная точка эллипса, заданного каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то касательной к эллипсу в точке M является прямая, задаваемая уравнением $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.	321

Т.86	Если M – произвольная точка эллипса, не являющаяся концом его большой оси, то касательной к эллипсу в точке M является прямая содержащая биссектрису угла, смежного с углом F_1MF_2 , где F_1 и F_2 – фокусы эллипса.	322
Т.87	Если $M(x_0; y_0)$ – произвольная точка гиперболы, заданной каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, то касательной к гиперболе в точке M является прямая, задаваемая уравнением $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.	325
Т.88	Если M – произвольная точка гиперболы, не являющаяся её вершиной, то касательной к гиперболе в точке M является прямая, содержащая биссектрису угла между фокальными радиусами точки M (т.е. $\angle F_1MF_2$, где F_1 и F_2 – фокусы гиперболы).	326
Т.89	Если $M(x_0; y_0)$ – произвольная точка параболы $y = ax^2$, то касательной к параболе в точке M является прямая, задаваемая уравнением $y + y_0 = 2axx_0$.	328
Т.90	Если M – произвольная точка параболы, не являющаяся её вершиной, то касательной к параболе в точке M является прямая содержащая биссектрису угла между фокальным радиусом точки M и перпендикуляром, опущенным из точки M на директрису.	328

УКАЗАТЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

0.1	Любое множество точек называется <i>геометрической фигурой</i> .	8
0.2	<i>Полупространством, определяемым плоскостью α</i> , называется пространственная геометрическая фигура, обладающая следующими свойствами: 1) она содержит плоскость α , не совпадая с ней; 2) если концы отрезка лежат в полупространстве, но не принадлежат плоскости α , то и весь отрезок не имеет общих точек с плоскостью α ; 3) если один из концов отрезка принадлежит полупространству, а другой – нет, то отрезок имеет с плоскостью α одну общую точку.	11
0.3	Если две прямые имеют только одну общую точку, то они называются <i>пересекающимися</i> .	15
0.4	<i>Углом между двумя пересекающимися прямыми</i> в пространстве называется угол между этими прямыми в плоскости, держащей эти прямые.	16
0.5	Две пересекающиеся прямые называются <i>перпендикулярными</i> , если они пересекаются под прямым углом.	17
0.6	Две прямые называются <i>параллельными</i> , если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.	19
0.7	Две прямые называются <i>скрещивающимися</i> , если они не пересекаются и не параллельны.	22
0.8	Две прямые называются <i>скрещивающимися</i> , если они не лежат в одной плоскости.	23

0.9	Прямая и плоскость называются <i>пересекающимися</i> , если они имеют только одну общую точку.	34
0.10	<i>Параллельной проекцией фигуры Φ</i> называется множество Φ_1 параллельных проекций всех точек данной фигуры.	39
0.11	Прямая называется <i>перпендикулярной</i> плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.	46
0.12	<i>Углом между двумя скрещивающимися прямыми</i> называется угол между двумя пересекающимися прямыми, каждая из которых либо параллельна одной из данных скрещивающихся прямых, либо совпадает с ней.	46
0.13	<i>Ортогональной проекцией точки A на плоскость α</i> называется точка A_1 пересечения с этой плоскостью прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной плоскости α .	53
0.14	<i>Проекцией фигуры на плоскость</i> называется множество проекций её точек на эту плоскость.	54
0.15	<i>Перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную плоскость</i> , называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости.	58
0.16	<i>Расстоянием от точки до плоскости</i> называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.	58
0.17	<i>Наклонной</i> , проведённой из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и не являющийся перпендикуляром к этой плоскости.	58

0.18	Отрезок, соединяющий основание перпендикуляра и основание наклонной, проведённых из одной и той же точки к данной плоскости, называется <i>проекцией наклонной на плоскость</i> .	59
0.19	<i>Углом между прямой и плоскостью</i> называется угол между прямой и её проекцией на плоскость.	64
0.20	Плоскость и прямая называются <i>параллельными</i> , если они не имеют общих точек.	66
0.21	Различные плоскости, которые имеют хотя бы одну общую точку, называются <i>пересекающимися</i> .	85
0.22	<i>Двугранным углом</i> называется объединение двух полуплоскостей, имеющих общую границу и одной из ограниченных ими частей пространства.	90
0.23	Если через произвольную точку ребра двугранного угла провести плоскость, перпендикулярную к ребру, то в пересечении этой плоскости с двугранным углом образуется угол, который называется <i>линейным углом двугранного угла</i> .	91
0.24	Величиной двугранного угла называется величина соответствующего ему линейного угла.	92
0.25	<i>Двугранный угол</i> называется <i>прямым</i> (острым, тупым), если его величина равна 90° (меньше 90° , больше 90°).	93
0.26	Два двугранных угла называются <i>равными</i> , если имеют одну и ту же величину (градусную меру)	94

0.27	Две пересекающиеся плоскости называются <i>перпендикулярными (или взаимно перпендикулярными)</i> , если они образуют прямые двугранные углы.	96
0.28	Две плоскости называются <i>параллельными</i> , если они не имеют общих точек.	101
0.29	<i>Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых</i> называется перпендикулярный каждой из прямых отрезок, один конец которого лежит на одной прямой, а другой конец – на другой прямой.	115
0.30	<i>Расстоянием между скрещивающимися прямыми</i> называется длина их общего перпендикуляра.	117
0.31	<i>Призмой</i> называется многогранник, у которого две грани, называемые <i>основаниями призмы</i> , равны и их соответственные стороны параллельны, а остальные грани – параллелограммы, у каждого из которых две стороны являются соответственными сторонами оснований. Эти остальные грани называются <i>боковыми гранями призмы</i> , а их стороны, не лежащие на основаниях призмы, – <i>боковыми рёбрами призмы</i> .	140
0.32	Призма, боковые рёбра которой перпендикулярны основаниям, называется <i>прямой призмой</i> . Призма, не являющаяся прямой, называется <i>наклонной</i> .	142
0.33	Прямая призма называется <i>правильной</i> , если её основаниями являются правильные многоугольники.	143
0.34	Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной её грани, называется <i>диагональю призмы</i> .	143

0.35	<i>Диагональным сечением призмы</i> называется сечение её плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани.	144
0.36	Призма, у которой основания – параллелограммы, называется <i>параллелепипедом</i> .	145
0.37	Прямой параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник, называется <i>прямоугольным параллелепипедом</i> .	145
0.38	Прямоугольный параллелепипед, все рёбра которого равны, называется <i>кубом</i> .	146
0.39	Многогранник, одна грань которого – произвольный многоугольник, а все остальные – треугольники с общей вершиной, называется <i>пирамидой</i> .	155
0.40	<i>Высотой пирамиды</i> называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на её основание. <i>Высотой пирамиды</i> называется также длина этого перпендикуляра.	155
0.41	Если основанием пирамиды является правильный многоугольник, а центр основания является и основанием высоты пирамиды, то пирамида называется <i>правильной</i> .	155
0.42	Высота боковой грани, проведённая из вершины правильной пирамиды, называется <i>апофемой пирамиды</i> .	155
0.43	Сумма площадей боковых граней пирамиды называется площадью её <i>боковой поверхности</i> (или кратко <i>боковой поверхностью</i>). Сумма боковой поверхности и площади её основания называется <i>полной поверхностью пирамиды</i> .	158

0.44	Часть пирамиды, заключённая между её основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию, называется <i>усечённой пирамидой</i> .	158
0.45	Усечённая пирамида называется <i>правильной</i> , если основаниями её служат правильные многоугольники, и прямая, соединяющая центры оснований, перпендикулярна плоскостям этих оснований.	159
0.46	<i>Боковой поверхностью усечённой пирамиды</i> называется сумма площадей её боковых граней. <i>Полной поверхностью усечённой пирамиды</i> называется сумма её боковой поверхности и площадей оснований.	159
0.47	Пусть даны многоугольник $ABC\dots$ (назовём его для краткости F) и точка S , не принадлежащая его плоскости. Объединение всех лучей, имеющих общее начало S и пересекающих данный многоугольник F , называется <i>многогранным углом</i> .	165
0.48	Трёхгранным углом, <i>полярным</i> данному трёхгранному углу $SABC$, называется трёхгранный угол $S_1A_1B_1C_1$, вершина которого – произвольная точка S_1 внутри данного трёхгранного угла, а его лучи перпендикулярны граням данного, а именно: $S_1A_1 \perp SBC$, $S_1B_1 \perp SAC$, $S_1C_1 \perp SAB$.	170
0.49	Многогранник называется <i>правильным</i> , если все его грани – равные правильные многоугольники и все его многогранные углы имеют одинаковое число граней.	173
0.50	Если фигура Φ получена при вращении некоторой фигуры F вокруг некоторой оси, то Φ называется <i>фигурой вращения</i> .	207
0.51	Фигура, образованная вращением полуокружности вокруг своего диаметра, называется <i>сферой</i> .	208

0.52	<i>Шаром</i> называется фигура, полученная вращением полукруга вокруг диаметра, ограничивающего этот полукруг.	209
0.53	Отрезок, соединяющий две точки сферы, называется <i>хордой сферы</i> (а также хордой соответствующего шара).	210
0.54	<i>Касательной плоскостью</i> к шару (сфере) называется плоскость, имеющая с шаром (сферой) одну и только одну общую точку.	222
0.55	Два радиуса разбивают круг на две части, каждая из которых называется <i>сектором круга</i> или <i>круговым сектором</i> .	224
0.56	Хорда разбивает круг на две части, каждая из которых называется <i>сегментом круга</i> .	224
0.57	Диаметр разбивает круг на два <i>полукруга</i> .	225
0.58	Часть шара, отсекаемая плоскостью, называется <i>шаровым сегментом</i> .	226
0.59	<i>Сферическим сегментом</i> называется часть сферы, отсекаемая плоскостью. Окружность, по которой плоскость пересекает сферу, называется основанием <i>сферического сегмента</i> .	227
0.60	Часть шара, заключённая между двумя пересекающимися его параллельными плоскостями, называется <i>шаровым слоем</i> . Часть сферы, заключённая между двумя её параллельными сечениями, называется <i>сферическим поясом</i> .	227
0.61	<i>Шаровым сектором</i> называется фигура, полученная при вращении кругового сектора с углом, меньшим 90° , вокруг прямой, содержащей один из ограничивающих круговой сектор радиусов.	228

0.62	Если все вершины многогранника принадлежат поверхности шара, то такой многогранник называется <i>вписанным в шар</i> , а шар называется <i>описанным около многогранника</i> .	232
0.63	Если все грани многогранника касаются шаровой поверхности, то такой многогранник называется <i>описанным около шара</i> , а шар называется <i>вписанным в многогранник</i> .	232
0.64	<i>Вневписанной окружностью</i> треугольника называется окружность, которая касается одной из его сторон и продолжения двух других сторон.	264
0.65	<i>Геометрическим местом точек</i> , удовлетворяющих данному условию, называется геометрическая фигура, каждая точка которой удовлетворяет этому условию, и ни одна точка, не принадлежащая фигуре, не удовлетворяет этому условию.	285
0.66	<i>Расстоянием от точки M до геометрической фигуры Φ</i> называется наименьшее из расстояний MK , где K – произвольная точка геометрической фигуры Φ (при условии, что это наименьшее расстояние существует).	286
0.67	Если AB – данный отрезок, а M – произвольная точка, не принадлежащая прямой AB , то <i>углом, под которым отрезок AB виден из точки M</i> называется угол при вершине M треугольника AMB .	287
0.68	<i>Эллипс</i> – это множество (геометрическое место) точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная, большая расстояния между фокусами.	318
0.69	<i>Касательной к эллипсу</i> называется прямая, имеющая с эллипсом единственную общую точку.	320

0.70	<i>Гипербола</i> – это множество (геометрическое место) точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.	324
0.71	<i>Касательной к гиперболе</i> называется прямая, не параллельная её асимптоте и имеющая с гиперболой единственную общую точку.	325
0.72	<i>Парабола</i> – это множество (геометрическое место) точек плоскости, равноудалённых от данной прямой (называемой <i>директрисой</i>) и от не лежащей на ней точки (называемой <i>фокусом</i>).	326
0.73	<i>Касательной к параболе</i> называется прямая, не параллельная её оси и имеющая с параболой единственную общую точку.	328

Как работать с учебником	3
Глава 1. Аксиоматический подход к изучению курса геометрии.	
Взаимное расположение прямых в пространстве	7
§ 1.1. Неопределяемые понятия в школьной геометрии	8
§ 1.2. Аксиоматика курса геометрии	9
§ 1.3. Доказательство первых теорем в пространстве	12
§ 1.4. Пересекающиеся и перпендикулярные прямые	15
§ 1.5. Параллельные прямые	18
§ 1.6. Скрещивающиеся прямые и их свойства	22
Глава 2. Взаимное расположение прямых и плоскостей	33
§ 2.1. Пересечение прямой и плоскости	34
§ 2.2. Метод параллельных проекций	35
§ 2.3*. Метод центральных проекций	43
§ 2.4. Перпендикулярность прямой и плоскости	45
§ 2.5. Перпендикуляр и наклонная к плоскости	58
§ 2.6. Параллельность прямой и плоскости	66
Глава 3. Взаимное расположение плоскостей	83
§ 3.1. Пересекающиеся плоскости	84
§ 3.2. Двугранные углы	90
§ 3.3. Перпендикулярные плоскости	95
§ 3.4. Параллельность плоскостей	101
§ 3.5. Перпендикуляр к плоскости и параллельность плоскостей ...	109
§ 3.6. Расстояние между скрещивающимися прямыми	114
Глава 4. Многогранники	137
§ 4.1. Понятие многогранника	138
§ 4.2. Призмы	139
§ 4.3. Параллелепипеды	145
§ 4.4. Поверхности призмы и их площадь	150
§ 4.5. Пирамиды. Усечённые пирамиды	154
§ 4.6*. Взаимное расположение многогранников и плоскостей.	
Построение сечений многогранников	160
§ 4.7. Трёхгранные и многогранные углы и свойства их плоских	
углов	165
§ 4.8*. Теоремы косинусов и синусов для трёхгранных углов	168
§ 4.9. Правильные многогранники	173

Глава 5. Сфера и шар	205
§ 5.1. Фигуры вращения. Определение сферы и шара.....	206
§ 5.2*. Изображение сферы и шара	212
§ 5.3. Сечение шара и сферы плоскостью	219
§ 5.4. Касательные плоскости к сфере (шару).....	222
§ 5.5. Части круга, сферы и шара	224
§ 5.6. Взаимное расположение сфер (шаров).....	229
§ 5.7*. Расстояния на шаре	230
§ 5.8. Многогранники, вписанные в шар (сферу) и описанные около шара (сферы).....	232
Дополнение. Геометрия на плоскости	255
§ Д.1. Свойство биссектрисы треугольника	256
§ Д.2. Формулы для площади треугольника	260
§ Д.3. Решение треугольников.....	265
§ Д.4. Некоторые вопросы геометрии окружности.....	272
§ Д.5. Геометрические места точек.....	285
§ Д.6. Решение задач с помощью геометрических преобразований и геометрических мест	293
§ Д.7. Теорема чевы и теорема менелая.....	303
§ Д.8. Эллипс, гипербола и парабола	317
§ Д.9. Неразрешимость классических задач на построение.....	330
Ответы	345
Указатель аксиом	364
Указатель теорем	365
Указатель определений	373

Гусев Валерий Александрович,
Рубин Александр Григорьевич

МАТЕМАТИКА:
АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ
ГЕОМЕТРИЯ
10 класс
Базовый и углублённый уровни

Концепция оформления и художественное редактирование – *Н.В. Меркулова*

Подписано в печать 30.07.16. Формат 70х90/16. Печать офсетная.

Бумага офсетная. Гарнитура Журнальная. Объём 24 п. л. Тираж 3 000 экз. Заказ №

Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2; 953005 – литература учебная

Издательство «Баласс»

109147 Москва, Марксистская ул., д. 5, стр. 1

Почтовый адрес: 111123 Москва, а/я 2, «Баласс»

Телефоны для справок: (499) 110-69-68; (495) 672-23-12, 368-70-54

<http://www.school2100.ru> E-mail: izd@balass.su

Отпечатано в типографии «Лика»

105203 Москва, ул. Нижняя Первомайская, д. 47